Дискретная математика

Щербакова Валентина Александровна

ПМ 2 курс, весенний семестр – зачет (как экзамен)

Глава I. Множества, бинарные отношения, мощность множеств.

Глава II. Алгебра логики (булевы функции).

Глава III. Комбинаторика.

Литература

1. Замятин А.П. Множества, отношения, алгебраические структуры.

2. Замятин А.П. Математическая логика.

3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов.

4. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.

Глава I. Множества, бинарные отношения, мощность множеств.

§1. Множества, булевы операции, свойства булевых операций.

Опр. Множество – набор каких-то объектов.

Элемент множества – каждый объект.

Множество содержит элемент: $a \in A$.

Элемент принадлежит множеству: $a \in A$.

$\mathbf{A} \ni a$

$\notin$

Множества чисел:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Опр. Пустое множество – множество, в котором нет ни одного элемента.

$\varnothing$

Опр. Множество называется конечным, если оно пустое или количество элементов в нем можно сосчитать.

Множество называется бесконечным – в противном случае, т.е. элементов в нем больше любого названного числа.

Опр. Мощность множества (на интуитивном уровне) – количество элементов в нем.

$|A|$

$|\varnothing| = 0$;

$|A| = n$, натуральное число, если A конечное и не пустое;

$|A| = \infty$, если A бесконечное;

$|A| < \infty$, если A конечное.

Способы задания множества:

1. Перечисление элементов

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

2. Указание свойства элементов

$$A = \left\{ a \;\middle|\; \text{описание свойства } a \right\}$$

Опр. Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. любой элемент множества A принадлежит B, и наоборот.

$$A = B$$

Опр. Множество A является подмножеством множества B, если любой элемент множества A принадлежит B.

$$A \subseteq B$$

$$B \supseteq A$$

Теорема.

$A = B \iff A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Опр. Булеан множества A – множество всех подмножеств множества A.

$\mathcal{B}(A)$

$\mathcal{B}(A) = \{\ B \mid B \subseteq A\ \}$

Свойство булеана:

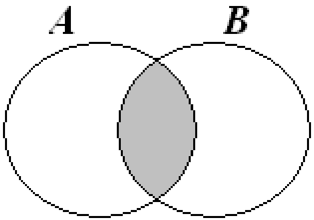
Если A конечное, то $|\mathcal{B}(A)| = 2^{|A|}$.

2^{A} – обозначение для булеана.

Опр. Пересечение множеств A и B – множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих A и B одновременно.

$A \cap B$

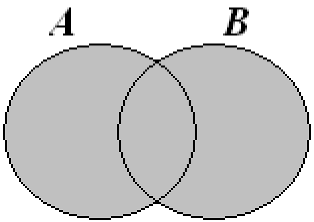
$$A \cap B = \left\{ a \;\middle|\; a \in A,\ a \in B \right\}$$



Опр. Объединение множеств A и B – множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или A, или B, или A и B одновременно (принадлежащих A или B).

$A \cup B$

$$A \cup B = \left\{ a \mid a \in A \text{ или } a \in B \right\}$$



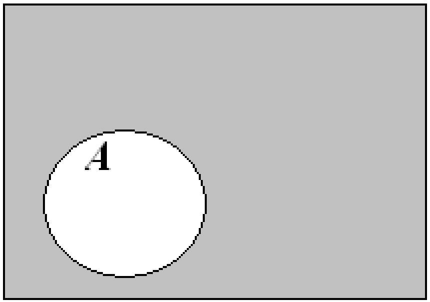
Опр. Универсальное множество для системы множеств – множество, содержащее все элементы этих множеств.

$\boldsymbol{I}$

Опр. Дополнение к множеству A – множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не принадлежащих A.

$\overline{A}$

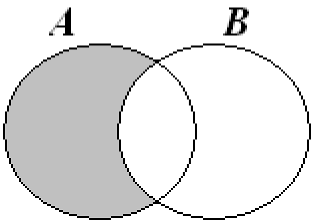
$$\overline{A} = \left\{ a \middle| \ a \in I,\ a \notin A \right\}$$



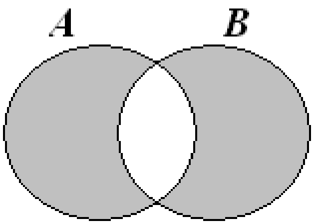
Опр. Разность множеств A и B – множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B.

$A \setminus B$

$$A \setminus B = \left\{ a \;\middle|\; a \in A,\ a \notin B \right\}$$



Симметрическая разность множеств



Очевидно, ее можно выразить как $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Свойства булевых операций:

1), 2) Идемпотентность

$A \cap A = A$;

$A \cup A = A$.

Замечание: $a \cdot a = a^2$; $a^2 = a$.

3), 4) Коммутативность

$A \cap B = B \cap A$;

$A \cup B = B \cup A$.

5), 6) Ассоциативность

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

7), 8) Дистрибутивность

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

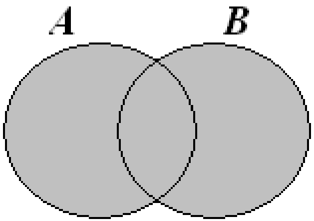
$$\boxed{a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)}$$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

9), 10) Законы поглощения

$A \cap (A \cup B) = A$;

Иллюстрация закона поглощения:



$A \cup (A \cap B) = A$.

11), 12)

$A \cap \overline{A} = \varnothing$ закон противоречия;

$A \cup \overline{A} = I$ закон «исключенного третьего».

13), 14) Законы де Моргана

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}\ ;$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}\ .$$

15), 16) Почти дистрибутивность разности слева (знак меняется)

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

17), 18) Дистрибутивность разности справа (знак не меняется)

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

19) Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

20) Выражение разности через другие операции

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Теорема.
Если множества A и B конечные, то
(1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
(2) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$;
(3) $|A \setminus B| \leq |A|$.

Доказательство (1):
Проведём подсчет элементов объединения множеств, сначала сосчитав элементы множества A:
$a_1, a_2, ..., a_n$ (при этом $n = |A|$).
Продолжая с номера n, сосчитаем элементы множества B:
$a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{n+m}$ (при этом $m = |B|$).
Всего подсчитано $n+m$ элементов, но некоторые подсчитаны дважды, а именно элементы из пересечения множеств.