§8. Теорема Поста (критерий полноты)

Опр. Основными замкнутыми классами (предполными) называются T_0, T_1, S, M, L.

Теорема (Поста).
Класс K булевых функций полный $\Leftrightarrow$ $K \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L$.

Теорема (Поста).

Класс K булевых функций полный $\Leftrightarrow$ $K \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L$.

Доказательство:

$\Rightarrow$)(необходимость)

Дано: K полный.

(от противного) Предположим, что $K \subseteq T_0$. Тогда $[K] \subseteq [T_0]$,т.е.
класс всех булевых функций = $[K] \subseteq [T_0] = T_0$. Противоречие.

Для предположения $K \subseteq T_1$(или S, M, L) – аналогично.

Следовательно, $K \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L$.

Теорема (Поста).

Класс K булевых функций полный $\Leftrightarrow$ $K \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L$.

Доказательство:

$\Leftarrow$)(достаточность)

Дано: $K \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L$.

Тогда класс K содержит функции

$f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_S \notin S$, $f_M \notin M$, $f_L \notin L$.

Покажем, что [K] содержит $x \cdot y$ и $\overline{x}$.

Заметим, что $f_0(0,\ldots,0)=1$, т.к. $f_0 \notin T_0$.

1 случай: $f_0(1,\ldots,1)=0$.
Рассмотрим $g(x)=f_0(x,\ldots,x)\in[K]$.

$g(0)=f_0(0,\ldots,0)=1;\quad g(1)=f_0(1,\ldots,1)=0$, т.е. $g(x)=\overline{x}$.

Т.к. $f_S \notin S$, то $[K] \ni \theta(x),\ \iota(x)$ (по лемме о несамодвойственной функции).

Т.к. $f_L \notin L$, то $[K] \ni x\cdot y$ (по лемме о нелинейной функции).

Заметим, что $f_0(0,\ldots,0)=1$, т.к. $f_0 \notin T_0$.

---

2 случай: $f_0(1,\ldots,1)=1$.

Рассмотрим $g(x)= f_0(x,\ldots,x)\in[K]$.

$g(0)= f_0(0,\ldots,0)=1$; $g(1)= f_0(1,\ldots,1)=1$, т.е. $g(x)=\iota(x)$.

Рассмотрим $h(x)= f_1(g(x),\ldots,g(x))\in[K]$.

$h(0)= f_1(g(0),\ldots,g(0))= f_1(1,\ldots,1)=0$;

$h(1)= f_1(g(1),\ldots,g(1))= f_1(1,\ldots,1)=0$.

Т.о. $h(x)=\theta(x)$.

Т.к. $f_M \notin M$, то $[K] \ni \overline{x}$ (по лемме о немонотонной функции).

Т.к. $f_L \notin L$, то $[K] \ni x \cdot y$ (по лемме о нелинейной функции).

Следовательно, K полный. Теорема доказана.

§9. Следствия из теоремы Поста

Теорема.
Каждый полный класс содержит полный подкласс, состоящий из не более четырех функций.

Доказательство:
Если K полный, то K содержит функции
$f_0 \notin T_0,\ f_1 \notin T_1,\ f_S \notin S,\ f_M \notin M,\ f_L \notin L$.

Если выполняется 1 случай из доказательства теоремы Поста, то $\{f_0, f_S, f_L\}$ – полный подкласс.
Если выполняется 2 случай из доказательства теоремы Поста, то $\{f_0, f_1, f_M, f_L\}$ – полный подкласс.

Пример (показывает, что в теореме нельзя заменить «четыре функции» на «три»).

$K = \{\theta(x), \iota(x), x \cdot y, x \oplus y \oplus z\}$.

Покажем, что K полный.

	T_0	T_1	S	M	L
$\theta(x)$	+	–	–	+	+
$\iota(x)$	–	+	–	+	+
$x \cdot y$	+	+	–	+	–
$x \oplus y \oplus z$	не важно	не важно	не важно	–	не важно

$(0,0,1) < (0,1,1)$, $1 = 0\oplus0\oplus1 > 0\oplus1\oplus1 = 0$.

Для доказательства того, что K не содержит полного подкласса из трех функций, заполним некоторые из оставшихся ячеек таблицы.

	T_0	T_1	S	M	L
$\theta(x)$	+	–	–	+	+
$\iota(x)$	–	+	–	+	+
$x \cdot y$	+	+	–	+	–
$x \oplus y \oplus z$	+	+	не важно	–	+

Опр. Замкнутый класс K называется предполным, если он не является полным, но для любой функции $f \notin K$ выполняется $f \cup K$ – полный класс.

Теорема.
Предполными классами являются T_0, T_1, S, M, L, и только они.

Теорема.
Предполными классами являются T_0, T_1, S, M, L, и только они.

Доказательство:

(2) Покажем, что других предполных классов (кроме T_0, T_1, S, M, L) не существует.

(от противного) Предположим K предполный класс, и $K \neq T_0, T_1, S, M, L$.

По теореме Поста K является подмножеством одного из классов T_0, T_1, S, M, L.

Если $K \subseteq T_0$, и $K \neq T_0$, то существует $f \in T_0 \setminus K$.

Тогда полный класс $f \cup K \subseteq T_0$. Противоречие.

Для предположения $K \subseteq T_1$ (или S, M, L) – аналогично.

Следовательно, K равен одному из классов T_0, T_1, S, M, L.

Теорема.

Предполными классами являются T_0, T_1, S, M, L, и только они.

Доказательство:

---

(1) Покажем, что классы T_0, T_1, S, M, L являются предполными. Для этого укажем внутри каждого класса функции, не принадлежащие остальным классам.

	T_0	T_1	S	M	L
$x \cdot y$	+	+	–	+	–
$x \oplus y$	+	–	–	–	+

	T_0	T_1	S	M	L
$x \cdot y$	+	+	–	+	–
$x \to y$	–	+	–	–	–

	T_0	T_1	S	M	L
$\overline{x}$	–	–	+	–	+
$(x \cdot y) \vee (y \cdot z) \vee (x \cdot z)$	+	+	+	+	–

	T_0	T_1	S	M	L
$\theta(x)$	+	–	–	+	+
$\iota(x)$	–	+	–	+	+
$x \cdot y$	+	+	–	+	–

	T_0	T_1	S	M	L
$\overline{x}$	–	–	+	–	+
$x \oplus y$	+	–	–	–	+