

Глава III. Комбинаторика

§ 1. Основные комбинаторные конфигурации и формулы

Комбинаторика = комбинаторный анализ – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов конечного множества в соответствии с некоторыми правилами.

Целью комбинаторного анализа является изучение комбинаторных конфигураций: вопросы их существования, алгоритмы построения, перечисление и подсчет количества.

Неформальная постановка задачи: Дано конечное множество Ω . Найти количество всех комбинаторных конфигураций определенного вида. Комбинаторная конфигурация – выборка элементов из Ω .

При вычислениях используют два правила (принципы комбинаторики).

Правило суммы.

Пусть S_1, S_2, \dots, S_k – попарно не пересекающиеся множества, каждое S_i содержит n_i элементов (вариантов). Выбираемый элемент принадлежит либо S_1 , либо S_2, \dots , либо S_k .

Тогда количество всех возможных различных вариантов выбора элемента равно $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Правило суммы равносильно формуле

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_k|,$$

где множества попарно не пересекаются.

Правило произведения (основной принцип комбинаторики).

Пусть имеется k независимых характеристик элементов, каждая i -ая характеристика имеет n_i различных вариантов.

Тогда количество всех возможных различных вариантов выбора элемента равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Пример.

1. Автомобиль – 3 модели, 5 окрасок.

Разных вариантов = $3 \cdot 5 = 15$ вариантов.

2. Автомобиль – 3 модели, 5 окрасок, 2 вида шин.

Разных вариантов = $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ вариантов.

Пусть упорядоченная выборка содержит n элементов (не обязательно различных), каждый элемент может быть любым из t типов.

Опр. Пусть множество Ω состоит из t элементов. Словом длины n над алфавитом Ω называется упорядоченный набор $a_1 a_2 \dots a_n$, где $a_i \in \Omega$.

Теорема.

Количество всех слов длины n над алфавитом Ω равно t^n .

Доказательство:

Для выбора каждой буквы a_i имеется t вариантов. По принципу

умножения количество всех вариантов $\underbrace{t \cdot t \cdot \dots \cdot t}_n = t^n$.

Пример.

Количество буквенных кодов в номерах автомобилей равно $12^3 = 1728$.

$\Omega = \{a, в, е, к, м, н, о, р, с, т, у, х\}$, $|\Omega| = 12$.

Буквенный код – слово длины 3 над алфавитом Ω .

Замечание. Слово длины n над алфавитом Ω является всюду определенным отображением $\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \Omega$. Следовательно, количество всех таких отображений равно t^n , где $t = |\Omega|$.

Опр. Пусть множество Ω состоит из n элементов. Перестановкой множества Ω называется упорядоченная последовательность $a_1 a_2 \dots a_n$ различных элементов, где $a_i \in \Omega$.

Обозначим P_n количество всех различных перестановок (зависит только от n).

$$P(n)$$

Теорема.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Опр. Назовем n -факториалом число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, если $n \geq 1$, и $0! = 1$.

Теорема.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Доказательство:

Для наглядности представим n ячеек (кармашков), в которые по одному помещают элементы множества Ω .

$$\bigcup_1 \bigcup_2 \dots \bigcup_n$$

Для 1-ой ячейки – n вариантов.

Если 1-ая занята, для 2-ой ячейки – $(n - 1)$ вариантов.

Если 1-ая и 2-ая заняты, для 3-ой ячейки – $(n - 2)$ вариантов.

И т.д.

Для n -ой ячейки – 1 вариант.

По принципу умножения количество всех вариантов

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n! .$$

Пример.

Количество номеров сотового телефона, где все цифры различные, равно $P_{10} = 10!$.

Замечание. Перестановка множества Ω является биекцией (взаимно однозначным отображением) $\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \Omega$, где $n = |\Omega|$.
Следовательно, количество всех таких биекций равно $P_n = n!$.

Другая комбинаторная конфигурация – размещение – получается, когда количество ячеек меньше, чем количество элементов Ω .

Опр. Пусть множество $|\Omega| = n$. Размещением из n по m называется упорядоченная последовательность $a_1 a_2 \dots a_m$ различных элементов, где $a_i \in \Omega$.

Обозначим A_n^m количество всех различных размещений из n по m (зависит только от n и m).

$$A(n, m)$$

Теорема.

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Доказательство:

Для наглядности представим m ячеек (кармашков), в которые по одному помещают элементы множества Ω .

$$\bigcup_1 \bigcup_2 \dots \bigcup_m$$

Для 1-ой ячейки — n вариантов.

Если 1-ая занята, для 2-ой ячейки — $(n-1)$ вариантов.

Если 1-ая и 2-ая заняты, для 3-ой ячейки — $(n-2)$ вариантов.

И т.д.

Для m -ой ячейки — $(n-m+1)$ вариант.

По принципу умножения количество всех вариантов

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m) \cdot \dots \cdot 1}{(n-m) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример.

Количество номеров городского телефона, где все цифры различные,

равно $A_{10}^7 = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}.$

Замечание 1. Перестановка из n элементов является размещением из n по n . Следовательно, $P_n = A_n^n$.

Замечание 2. Размещение из n по m является всюду определенной инъекцией $\varphi: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \Omega$, где $n = |\Omega|$. Следовательно, количество всех таких инъекций равно A_n^m .

Ещё одна комбинаторная конфигурация – сочетание – неупорядоченная выборка, т.е. множество.

Опр. Пусть множество $|\Omega| = n$. Сочетанием из n по m называется неупорядоченный набор a_1, a_2, \dots, a_m различных элементов, где $a_i \in \Omega$.

Обозначим C_n^m количество всех различных сочетаний из n по m (зависит только от n и m).

$$C(n, m), \quad \binom{m}{n}$$

Теорема.

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}.$$

Доказательство:

Каждое сочетание из n по m можно упорядочить, получив размещение из n по m . Число способов упорядочить набор из m элементов равно $P_m = m!$.

Следовательно, $A_n^m = C_n^m \cdot m!$. Т.е. $\frac{n!}{(n - m)!} = C_n^m \cdot m!$

Пример.

Количество всех трехэлементных подмножеств множества

$$\Omega = \{a, в, е, к, м, н, о, р, с, т, у, х\} \text{ равно } C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220.$$

Замечание. Рассмотрим строго возрастающие функции $\varphi: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Каждую такую функцию можно построить, выбрав m различных чисел из множества $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, которые упорядочиваются по возрастанию единственным образом. Следовательно, количество всех таких функций равно C_n^m .

§ 2. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.
Обобщение бинома

Опр. Биномиальными коэффициентами называются числа

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}.$$

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m}.$$

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m} .$$

Доказательство 1 (интуитивное):

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)}_1 \cdot \dots \cdot \underbrace{(a + b)}_n .$$

Раскрывая скобки получим сумму слагаемых вида $a^m \cdot b^{n-m}$, из каждой скобки участвует либо a , либо b .

Для каждого m количество слагаемых $a^m \cdot b^{n-m}$ равно количеству вариантов выбора скобок, из которых участвует a , причем порядок номеров скобок не важен. Следовательно, количество вариантов равно C_n^m .

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m} .$$

Доказательство 2 (индукция по n):

Б.И. $n = 1$. $(a + b)^1 = \sum_{m=0}^1 C_n^m \cdot a^m \cdot b^{1-m} = C_1^0 \cdot a^0 \cdot b^1 + C_1^1 \cdot a^1 \cdot b^0 = b + a$,

где $C_1^0 = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = 1$, $C_1^1 = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1$. Верно.

Ш.И. Пусть формула верна для степени $(n - 1)$, т.е.

$$(a + b)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^m \cdot b^{n-1-m}.$$

Тогда $(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b)^{n-1} = (a + b) \cdot \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^m \cdot b^{n-1-m} =$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^{m+1} \cdot b^{n-1-m} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^m \cdot b^{n-1-m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^{m+1} \cdot b^{n-1-m} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^m \cdot b^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^{m+1} \cdot b^{n-1-m} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m \cdot a^m \cdot b^{n-m} =$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые степени a и b .

$$= C_{n-1}^0 \cdot a^0 \cdot b^n + C_{n-1}^{n-1} \cdot a^n \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) \cdot a^k \cdot b^{n-k} =$$

Упростим $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k.$$

Продолжим равенство

$$= C_{n-1}^0 \cdot a^0 \cdot b^n + C_{n-1}^{n-1} \cdot a^n \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k} =$$

Вычислим $C_{n-1}^0 = \frac{(n-1)!}{0! \cdot (n-1)!} = 1 = \frac{n!}{0! \cdot n!} = C_n^0.$

Аналогично $C_{n-1}^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot 0!} = 1 = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = C_n^n.$ Следовательно,

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Свойства биномиальных коэффициентов ($C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$).

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, где $1 \leq m \leq n-1$.

3. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

4. Треугольник Паскаля

n	$m = 0, 1, \dots, n$						
0	1						
1	1		1				
2	1		2		1		
3	1	3		3		1	
4	1	4	6		4	1	
5	1	5	10		10	5	1

$$5. \sum_{m=0}^n C_n^m = ?$$

$$5. \sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n .$$

Доказательство:

$$\sum_{m=0}^n C_n^m = \sum_{m=0}^n C_n^m \cdot 1^m \cdot 1^{n-m} = (1+1)^n = 2^n .$$

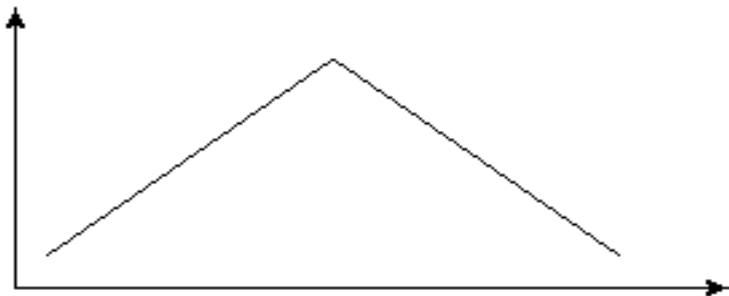
$$6. \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m = ?$$

$$6. \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m = 0, \text{ для } n \geq 1.$$

Доказательство:

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m = \sum_{m=0}^n C_n^m \cdot (-1)^m \cdot 1^{n-m} = (-1+1)^n = 0^n.$$

7. При фиксированном n переменном m последовательность C_n^m унимодальная, т.е. существует k , такая, что $C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^k \geq C_n^{k+1} > \dots > C_n^n$.



Если n четное, то $k = \frac{n}{2}$, и $C_n^k > C_n^{k+1}$.

Если n нечетное, то $k = \frac{n-1}{2}$, и $C_n^k = C_n^{k+1}$.

8. Пусть $f(x) = (1+x)^n$.

При разложении в сумму получим биномиальные коэффициенты C_n^m как коэффициенты при соответствующей степени x^m .

Теорема (Обобщение бинома Ньютона).

$$(a_1 + \dots + a_S)^n = \sum_{\{k_1, \dots, k_{S-1}\}} C(n; k_1, \dots, k_{S-1}) \cdot a_1^{k_1} \cdot \dots \cdot a_{S-1}^{k_{S-1}} \cdot a_S^{n-(k_1+\dots+k_{S-1})}, \text{ где}$$

$C(n; k_1, \dots, k_{S-1})$ – число способов выбрать элементы a_1, \dots, a_S при раскрытии скобок.

Опр. Полиномиальными коэффициентами называются числа $C(n; k_1, \dots, k_{S-1})$.

Теорема.

$$C(n; k_1, \dots, k_{S-1}) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{n-(k_1+\dots+k_{S-2})}^{k_{S-1}}.$$