§5. Отношение частичного порядка.

Опр. Отношение R на A называется отношением частичного порядка, если R рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Опр. Частично упорядоченное множество (ч.у.м.) – множество A, на котором задано отношение R частичного порядка.

(A, R)

Опр. Элементы a и b в ч.у.м. (A, R) называются сравнимыми, если $(a, b) \in R$ или $(b, a) \in R$.

Опр. Элементы a и b в ч.у.м. (A, R) называются сравнимыми, если $(a, b) \in R$ или $(b, a) \in R$.

Опр. Отношение R называется отношением линейного порядка, если оно является отношением частичного порядка, и любые два элемента в A сравнимы.

Опр. Линейно упорядоченное множество (л.у.м., цепь) – множество A, на котором задано отношение R линейного порядка.

(A, R)

Опр. Пусть (A, R) – ч.у.м..
Элемент b покрывает a, если $(a, b) \in R$, $a \neq b$, и из того, что $(a, c) \in R$ и $(c, b) \in R$ следует $c = a$ или $c = b$.

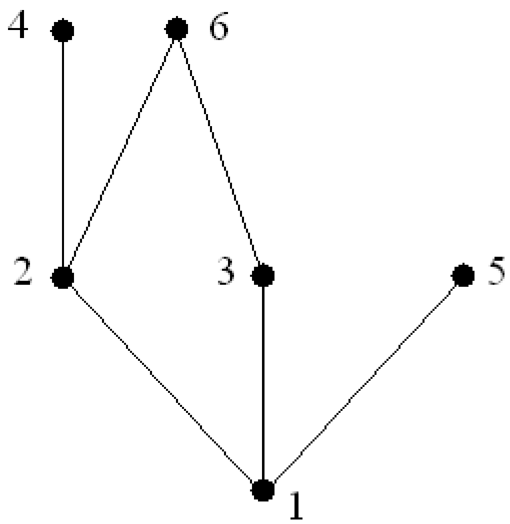
Опр. Диаграмма Хассе ч.у.м. (A, R) – рисунок, в котором точки соответствуют элементам множества A; точку b рисуют выше точки a, если $(a, b) \in R$; и точки a и b соединяют линией, если b покрывает a.

Примеры.

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $R = \{(a, b) \mid a$ делит $b\}$.

Пример 1.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $R = \{(a, b) \mid a \text{ делит } b\}$.

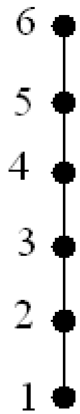


$(A, \mid)$, ч.у.м., не является л.у.м..

Пример 2.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $R = \{(a, b) \mid a \le b\}$.

Пример 2.
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $R = \{(a, b) \mid a \le b\}$.



$(A, \le)$, л.у.м., «цепь»

Пусть $(A, \leq)$ – произвольное ч.у.м.. Тогда вместо $(a, b) \in R$ будем указывать $a \leq b$.

Опр. Наименьшим элементом называется элемент a, если для любого $x \in A$ выполняется $a \leq x$.

Опр. Наибольшим элементом называется элемент a, если для любого $x \in A$ выполняется $x \leq a$.

В примере 1: наименьший элемент 1, наибольшего – нет.

В примере 2: наименьший элемент 1, наибольший – 6.

Опр. Минимальным элементом называется элемент a, если из $x \le a$ следует $x = a$.

Опр. Максимальным элементом называется элемент a, если из $a \le x$ следует $x = a$.

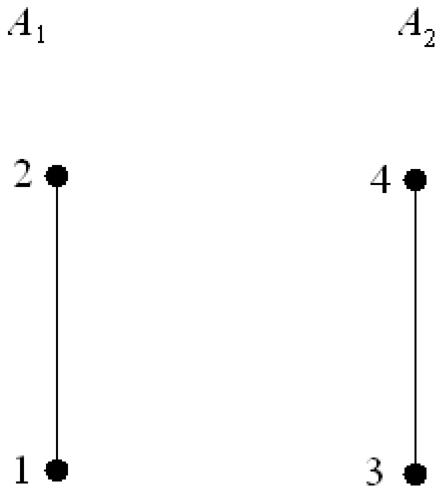
В примере 1: минимальный элемент 1, максимальные элементы – 4, 5, 6.

В примере 2: минимальный элемент 1, максимальный – 6.

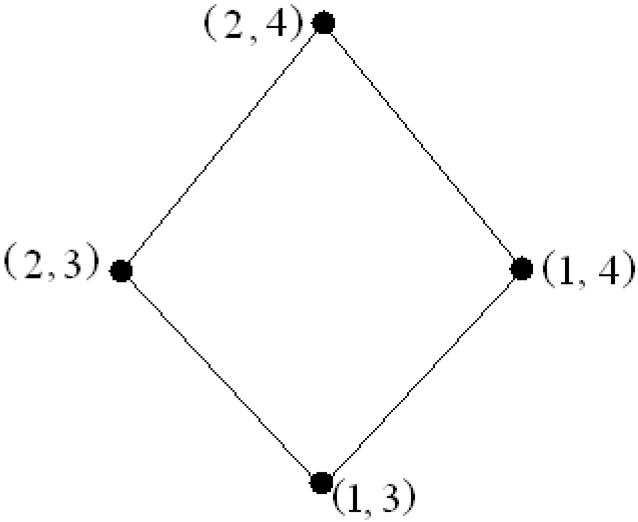
Опр. Прямым произведением двух ч.у.м. $(A_1, \leq_1)$ и $(A_2, \leq_2)$ называется ч.у.м. $(A, \leq)$, где $A = A_1 \times A_2$, и $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ только если $x_1 \leq_1 y_1$ и $x_2 \leq_2 y_2$.

Пример (показывает, что прямое произведение двух л.у.м. не является л.у.м.).

$A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $\leq_1$ и $\leq_2$ совпадают с обычным $\leq$, т.е



Тогда $A_1 \times A_2 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$.
Пары (1, 4) и (2, 3) не сравнимы.



Опр. Лексикографическим произведением двух л.у.м. $(A_1, \leq_1)$ и $(A_2, \leq_2)$ называется л.у.м. (A, ≤), где $A = A_1 \times A_2$, и $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ только если $x_1 \leq_1 y_1$ и $x_1 \neq y_1$, или $x_1 = y_1$ и $x_2 \leq_2 y_2$.

Замечание: запись $x < y$ равносильна $x \leq y$ и $x \neq y$.

Пример.

$A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $\leq_1$ и $\leq_2$ совпадают с обычным ≤.

$A_1 \times A_2 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$.

Тогда диаграмма Хассе лексикографического произведения: