§7. Отображения (функции)

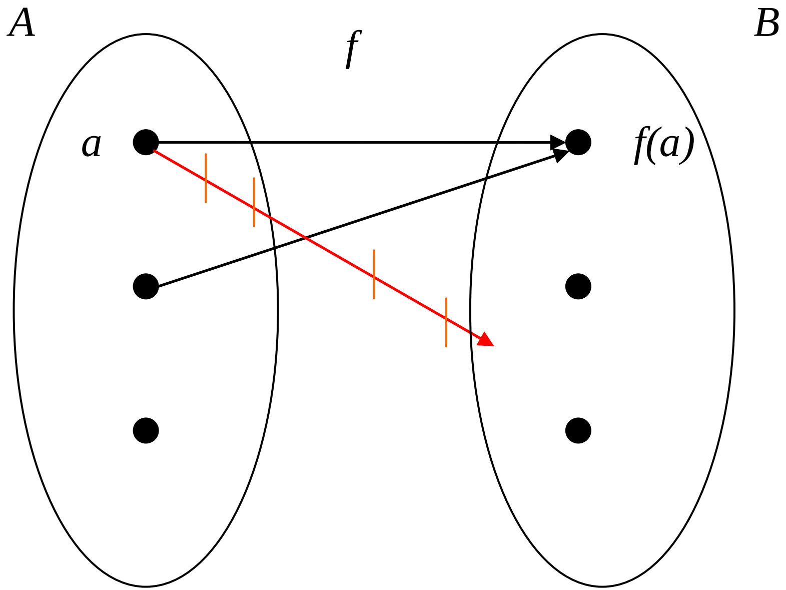
Опр. Отображением из A в B называется бинарное отношение f между A и B, такое, что из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $a_1 = a_2$ следует, что $b_1 = b_2$. («Однозначность»)

$f: A \to B$

Опр. Образ элемента a – элемент b, такой, что $(a,b) \in f$.

$f(a)$

Опр. Прообраз элемента b – элемент a, такой, что $(a,b) \in f$.


A
f
B
a
f(a)

Опр. Область определения отображения f

$d(f) = \{a \mid \exists f(a)\}$.

Опр. Область значений отображения f

$i(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A\colon f(a) = b\}$.

Опр. Пусть $A' \subseteq A$. Образ множества A' –

$f(A') = \{ f(a) \mid a \in A' \}$.

Опр. Пусть $B' \subseteq B$. Полный прообраз множества B' –

$f^{-1}(B') = \{ a \mid \exists b \in B' : f(a) = b \}$.

Замечание:

$d(f) = f^{-1}(B)$;

$i(f) = f(A)$.

Операции с отображениями: суперпозиция и обращение.

Опр. Пусть $f: \ A \to B$, $g: \ B \to C$. Суперпозицией отображений называется их произведение как бинарных отношений, т.е. $f * g = \{(a,b) \mid \ \exists t \in B : (a,t) \in f,\ (t,b) \in g\}$.

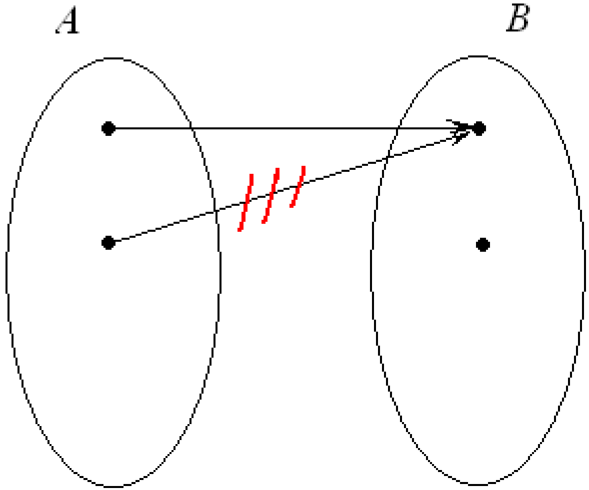
Замечание:
$(f * g)(a) = g(f(a))$.

Опр. Тождественным отображением на A называется $e_A : A \to A$, такое, что для любого $x \in A$ выполняется $e_A(x) = x$.

Опр. Пусть $f: A \to B$. Обратное отображение к f –
$f^{-1}: i(f) \to A$, такое, что $f * f^{-1} = e_{d(f)}$.

Замечание: обратное отображение может не существовать.

Опр. Отображение f из A в B называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$.
(«Обратная однозначность»)



Опр. Отображение f из A в B называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$.
(«Обратная однозначность»)

Опр. Отображение f из A в B называется всюду определенным, если $d(f) = A$.

Опр. Отображение f из A в B называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$.
(«Обратная однозначность»)

Опр. Отображение f из A в B называется всюду определенным, если $d(f) = A$.

Опр. Отображение f из A в B называется сюръективным, если $i(f) = B$.

Опр. Отображение f из A в B называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$. («Обратная однозначность»)

Опр. Отображение f из A в B называется всюду определенным, если $d(f) = A$.

Опр. Отображение f из A в B называется сюръективным, если $i(f) = B$.

Опр. Отображение f из A в B называется биективным, если оно инъективное, всюду определенное и сюръективное.

Инъекция, сюръекция, биекция.

Теорема.
(1) Суперпозиция инъективных отображений – инъективно.
(2) Суперпозиция всюду определенных отображений – всюду определенное.
(3) Суперпозиция сюръективных отображений – сюръективно.
(4) Суперпозиция биективных отображений – биективно.

Теорема.
Обратное отображение к f существует $\Leftrightarrow$ f инъективно.

Следствие.
Если f – биекция, то f^{-1} – тоже биекция.