

Глава II. Булевы функции

§1. Высказывания, формулы. Булевы функции: основные определения.

Опр. Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать: истинно оно или ложно.

Опр. Значение истинности высказывания – истина или ложь.

и	л
1	0

Высказывания делятся на простые и составные.

Опр. Составное высказывание получено из простых при помощи операций (связок).

Операции:

конъюнкция	$X \& Y$	$X \wedge Y$
дизъюнкция	$X \vee Y$	
отрицание	$\neg X$	
импликация	$X \rightarrow Y$	
эквиваленция	$X \leftrightarrow Y$	

Опр. Конъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «и», т.е. «... X ... и ... Y ...».

$X \& Y$

Опр. Дизъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «или», т.е. «... X ... или ... Y ...».

$X \vee Y$

Опр. Конъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «и», т.е. «... X ... и ... Y ...».

$X \& Y$

Опр. Дизъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «или», т.е. «... X ... или ... Y ...».

$X \vee Y$

Опр. Отрицание высказывания X – высказывание, полученное при помощи приставки «не», т.е. «не ... X ...».

$\neg X$

Опр. Импликация высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «Если ... X ..., то ... Y ...».

$X \rightarrow Y$

Опр. Импликация высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «Если ... X ..., то ... Y ...».

$$X \rightarrow Y$$

Опр. Эквиваленция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «... X ..., если и только если ... Y ...».

$$X \leftrightarrow Y$$

Опр. Атомарная формула логики высказываний – заглавная буква латинского алфавита, с индексом или без, а также символ 0 или 1.

Опр. Формула логики высказываний – выражение одного из двух видов:

1) атомарная формула;

2) $(F) \& (G)$, $(F) \vee (G)$, $\neg(F)$, $(F) \rightarrow (G)$, $(F) \leftrightarrow (G)$,

где F и G – формулы логики высказываний.

Пример.

Формула $\neg X \& Y \rightarrow Z$ означает $((\neg X) \& Y) \rightarrow Z$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n): \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

Пусть $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n \cup \dots$ – множество символов функций,
 V – множество переменных.

Опр. Булевыми функциями называются выражения одного из двух видов:

- 1) $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$, где $f \in F_n$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$;
- 2) $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $f \in F_n$, t_1, t_2, \dots, t_n – булевы функции.

Введем обозначения для некоторых функций.

Одноместные функции:

$\theta(x)$ – константа 0 (вариант: 0);

$\iota(x)$ – константа 1 (вариант: 1);

$\varepsilon(x)$ – тождественная функция (вариант: x);

\bar{x} – отрицание (вариант: $\neg x$).

x	$\theta(x)$	$\iota(x)$	$\varepsilon(x)$	\bar{x}
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Двухместные функции (инфиксное обозначение):

$x \cdot y$ – умножение (конъюнкция);

$x \vee y$ – дизъюнкция;

$x \rightarrow y$ – импликация;

$x \leftrightarrow y$ – эквиваленция;

Двухместные функции (инфиксное обозначение):

$x \cdot y$ – умножение (конъюнкция);

$x \vee y$ – дизъюнкция;

$x \rightarrow y$ – импликация;

$x \leftrightarrow y$ – эквиваленция;

$x \oplus y$ – сложение (по модулю 2)

$x \mid y$ – штрих Шеффера

$x \downarrow y$ – стрелка Пирса

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0					
0	1	0	1					
1	0	0	1					
1	1	1	1					

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1				
0	1	0	1	1				
1	0	0	1	0				
1	1	1	1	1				

Правило:

- 1) из ложной посылки можно вывести что угодно;
- 2) импликация ложна, только если из истинной посылки получается ложное заключение.

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1			
0	1	0	1	1	0			
1	0	0	1	0	0			
1	1	1	1	1	1			

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0		
0	1	0	1	1	0	1		
1	0	0	1	0	0	1		
1	1	1	1	1	1	0		

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	0	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	
1	1	1	1	1	1	0	0	

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Свойства функций (законы логики высказываний):

$$1) f \cdot 1 \equiv f$$

$$2) f \vee 1 \equiv 1$$

$$3) f \cdot 0 \equiv 0$$

$$4) f \vee 0 \equiv f$$

Пример доказательства:

f	$f \cdot 1$	$f \vee 0$
0	0	0
1	1	1

$$5) f \cdot f \equiv f$$

$$6) f \vee f \equiv f$$

ИдемпоТЕНТНОСТЬ

$$7) f \cdot g \equiv g \cdot f$$

$$8) f \vee g \equiv g \vee f$$

Коммутативность

$$9) (f \cdot g) \cdot h \equiv f \cdot (g \cdot h)$$

Ассоциативность

$$10) (f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$$

Следствие:

$$f \cdot g \cdot h;$$

$$f \vee g \vee h.$$

$$11) f \cdot (g \vee h) \equiv (f \cdot g) \vee (f \cdot h)$$

Дистрибутивность

$$12) f \vee (g \cdot h) \equiv (f \vee g) \cdot (f \vee h)$$

$$13) f \cdot (f \vee h) \equiv f$$

Законы поглощения

$$14) f \vee (f \cdot h) \equiv f$$

Пример доказательства:

f	h	$f \vee h$	$f \cdot (f \vee h)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

$$15) f \cdot \overline{f} \equiv 0$$

Закон противоречия

$$16) f \vee \overline{f} \equiv 1$$

Закон исключенного третьего

$$17) \overline{(f \cdot g)} \equiv \overline{f} \vee \overline{g}$$

$$18) \overline{(f \vee g)} \equiv \overline{f} \cdot \overline{g}$$

Законы де Моргана

$$19) \overline{\overline{f}} \equiv f$$

Закон двойного отрицания

$$20) f \rightarrow g \equiv \overline{f} \vee g$$

Выражение импликации

$$21) f \leftrightarrow g \equiv (f \rightarrow g) \cdot (g \rightarrow f)$$

Выражение эквиваленции

§2. Нормальные формы

Опр. Литерал – переменная или ее отрицание.
(не константа 0 и 1).

Элементарная конъюнкция – литерал или конъюнкция литералов.

Опр. Функция f имеет дизъюнктивно-нормальную форму (ДНФ), если она является элементарной конъюнкцией или дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

$$(\dots \cdot \dots \cdot \dots) \vee (\dots \cdot \dots) \vee (\dots) \dots$$

Теорема 1.

Для всякой функции f существует тождественно равная функция, имеющая ДНФ.

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет совершенную дизъюнктивно-нормальную форму (СДНФ) относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n , если:

- 1) в записи f участвуют только x_1, x_2, \dots, x_n ;
- 2) f имеет ДНФ, т.е. $f = C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_k$;
- 3) Каждая C_i содержит или x_j , или $\overline{x_j}$, для любого j .
- 4) f не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Опр. Булева функция называется выполнимой, если она не равна константе 0.

Теорема 2.

Для всякой выполнимой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует тождественно равная функция, имеющая СДНФ.

Доказательство:

Если составить таблицу значений функции, то в ней будут строки со значением 1:

x_1	\dots	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
\dots			
			1
\dots			

Запишем дизъюнкцию скобок, количество скобок равно количеству строк, где значение функции 1. В каждой скобке будет произведение переменных либо их отрицаний: если значение переменной 1 – используется эта переменная, если значение переменной 0 – используется отрицание этой переменной.

Полученная дизъюнкция скобок имеет СДНФ, и тождественно равна $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Теорема 2 доказана.

Замечание: если f выполнимая, то существует СДНФ \Rightarrow существует ДНФ.

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, то $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x_1 \cdot \overline{x_1}$ – ДНФ.

Теорема 1 доказана.

Элементарная дизъюнкция – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр. Функция f имеет конъюнктивно-нормальную форму (КНФ), если она является элементарной дизъюнкцией или конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

$$(\dots \vee \dots \vee \dots) \cdot (\dots \vee \dots) \cdot (\dots) \dots$$

Теорема 3.

Для всякой функции f существует тождественно равная функция, имеющая КНФ.

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет совершенную конъюнктивно-нормальную форму (СКНФ) относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_n , если:

- 1) в записи f участвуют только x_1, x_2, \dots, x_n ;
- 2) f имеет КНФ, т.е. $f = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_k$;
- 3) Каждая D_i содержит или x_j , или $\overline{x_j}$, для любого j .
- 4) f не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Опр. Булева функция называется тождественно истинной, если она равна константе 1.

Теорема 4.

Для всякой не тождественно истинной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует тождественно равная функция, имеющая СКНФ.

Доказательство:

Если составить таблицу значений функции, то в ней будут строки со значением 0:

x_1	\dots	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
\dots			
			0
\dots			

Запишем конъюнкцию скобок, количество скобок равно количеству строк, где значение функции 0. В каждой скобке будет дизъюнкция переменных либо их отрицаний: если значение переменной 0 – используется эта переменная, если значение переменной 1 – используется отрицание этой переменной.

Полученная конъюнкция скобок имеет СКНФ, и тождественно равна $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Теорема 4 доказана.

Замечание: если f не тождественно истинная, то существует СКНФ \Rightarrow существует КНФ.

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$, то $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x_1 \vee \overline{x_1}$ – КНФ.

Теорема 3 доказана.