§6. Класс монотонных функций

Пусть набор переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обозначен как вектор $\boldsymbol{x}$. Тогда функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет записана как $f(\boldsymbol{x})$.

Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ значений переменных выполняется $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$ тогда и только тогда, когда $a_1 \leq b_1, \ldots,$ $a_n \leq b_n$ (как в прямом произведении ч.у.м.).

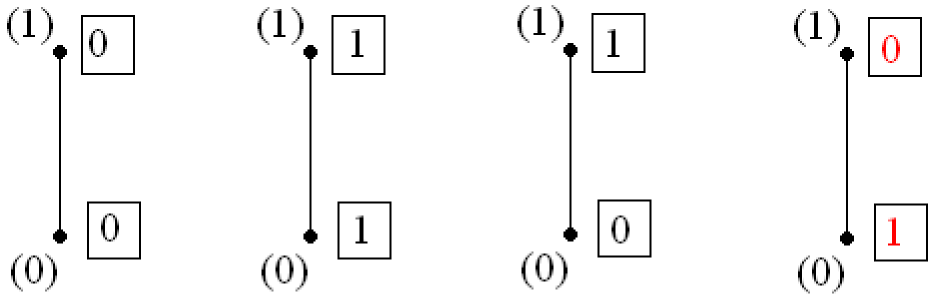
Опр. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для любых значений $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, из условия $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ следует $f(\boldsymbol{a}) \le f(\boldsymbol{b})$.

Опр. Обозначим M класс всех монотонных функций.

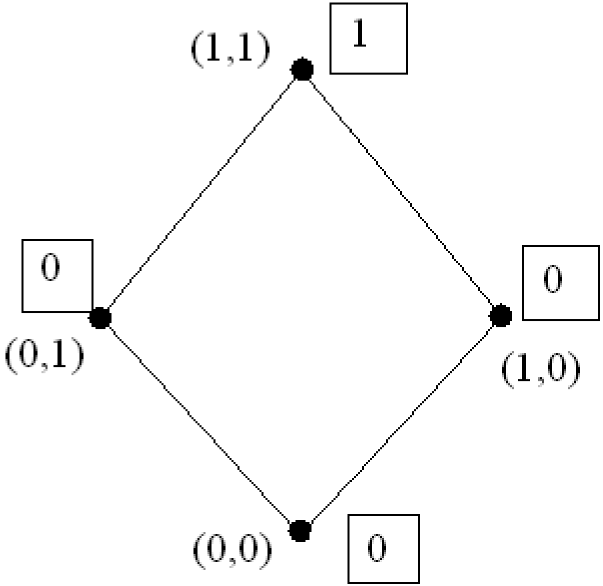
Пример.

$\theta(x), \iota(x), \varepsilon(x),\ x \cdot y,\ x \vee y \ \in M$.

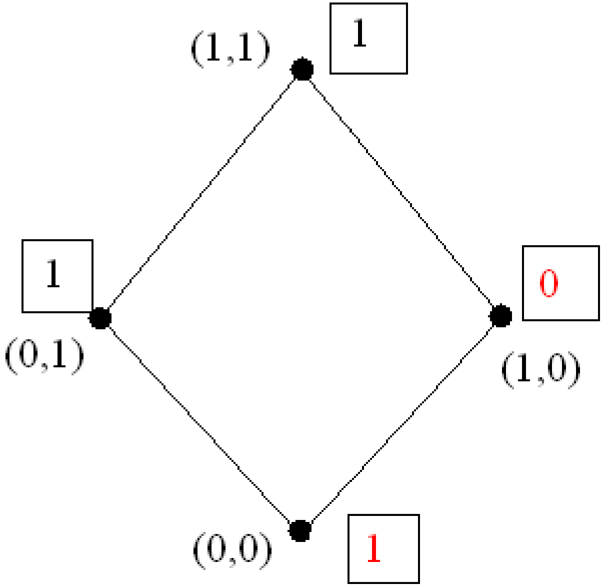
Проверка:



для одноместных функций.



для $x \cdot y$.



для $x \to y$.

Утверждение.
Класс M замкнут.

Лемма (о немонотонной функции).

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin M$ и $K = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \theta(x), \iota(x) \}$, то $[K] \ni \overline{x}$.

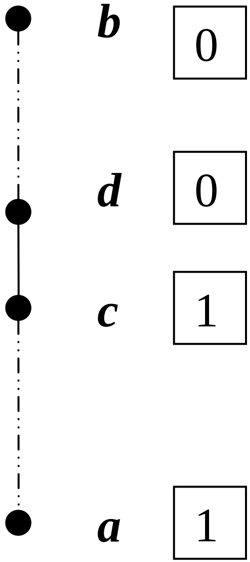
Доказательство:

Требуется показать, что $\overline{x}$ можно выразить через функции класса K.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin M$, то существуют векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, такие, что $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$, но $f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{b})$.

Т.е. $f(\boldsymbol{a}) = 1$, $f(\boldsymbol{b}) = 0$.

Рассмотрим часть диаграммы ч.у.м. между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.



Тогда найдутся векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, такие, что $\boldsymbol{d}$ покрывает $\boldsymbol{c}$ и $f(\boldsymbol{c}) = 1$, $f(\boldsymbol{d}) = 0$.

Это значит, что $\bar{c}$ и $\bar{d}$ отличаются только одной координатой с номером k.

Пусть $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$,

$c_{k+1} = \ldots = c_n = 1$;

$d_1 = d_2 = \ldots = d_{k-1} = 0$, $d_k = \ldots = d_n = 1$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(\underbrace{\theta(x),\ldots,\theta(x)}_{k-1}, x, \iota(x),\ldots,\iota(x))$.

Функция $g(x) \in [K]$.

Ее значение $g(0) = f(\underbrace{0,\ldots,0}_{k},1,\ldots,1) = f(\boldsymbol{c}) = 1;$

$$g(1) = f(\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},1,\ldots,1) = f(\boldsymbol{d}) = 0.$$

Т.о. $g(x) = \overline{x}$. Лемма доказана.

§7. Класс линейных функций

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется линейной, если существует набор коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ такой, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n$.

Опр. Обозначим L класс всех линейных функций.

Пример.

$\theta(x),\ \iota(x),\ \varepsilon(x),\ \overline{x},\ x \leftrightarrow y,\ x \oplus y \in L$.

Проверка:

$$\theta(x) = 0 \oplus 0 \cdot x\,;$$

$$\iota(x) = 1 \oplus 0 \cdot x\,;$$

$$\varepsilon(x) = 0 \oplus 1 \cdot x\,;$$

$$\overline{x} = 1 \oplus 1 \cdot x\,.$$

Предположим, что $x \cdot y = a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$.

x	y	$x \cdot y$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$	
0	0	0	a_0	$\Rightarrow a_0 = 0$
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1		

x	y	$x \cdot y$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$	
0	0	0	a_0	$\Rightarrow a_0 = 0$
0	1	0	$0 \oplus a_2$	$\Rightarrow a_2 = 0$
1	0	0	$0 \oplus a_1$	$\Rightarrow a_1 = 0$
1	1	1		

x	y	$x \cdot y$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$	
0	0	0	a_0	$\Rightarrow a_0 = 0$
0	1	0	$0 \oplus a_2$	$\Rightarrow a_2 = 0$
1	0	0	$0 \oplus a_1$	$\Rightarrow a_1 = 0$
1	1	1	$0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$	противоречие

Следовательно, $x \cdot y$ не является линейной.

Предположим, что $x \leftrightarrow y = a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$.

x	y	$x \leftrightarrow y$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$	
0	0	1	a_0	$\Rightarrow a_0 = 1$
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1		

x	y	$x \leftrightarrow y$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$	
0	0	1	a_0	$\Rightarrow a_0 = 1$
0	1	0	$1 \oplus a_2$	$\Rightarrow a_2 = 1$
1	0	0	$1 \oplus a_1$	$\Rightarrow a_1 = 1$
1	1	1		

x	y	$x \leftrightarrow y$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y$	
0	0	1	a_0	$\Rightarrow a_0 = 1$
0	1	0	$1 \oplus a_2$	$\Rightarrow a_2 = 1$
1	0	0	$1 \oplus a_1$	$\Rightarrow a_1 = 1$
1	1	1	$1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$	верно

Следовательно, $x \leftrightarrow y$ является линейной, $x \leftrightarrow y = 1 \oplus 1 \cdot x \oplus 1 \cdot y$.

$$\boxed{x \leftrightarrow y = 1 \oplus x \oplus y}$$

Утверждение.
Класс L замкнут.

Лемма (о нелинейной функции).

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin L$ и $K = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \theta(x), \imath(x), \overline{x} \}$, то $[K] \ni x \cdot y$.

Лемма (о нелинейной функции).

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin L$ и $K = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \theta(x), \iota(x), \overline{x} \}$, то $[K] \ni x \cdot y$.

Доказательство:

Каждую функцию можно выразить полиномом Жегалкина:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1, \ldots, i_k\}} a_{i_1, \ldots, i_k} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}.$$

Т.к. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin L$, в полиноме найдется хотя бы одно слагаемое с ненулевым коэффициентом и произведением не менее двух переменных. Будем считать, что это переменные x_1 и x_2.

Сгруппируем слагаемые:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot f_0(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 \cdot f_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus$$
$$\oplus\, x_2 \cdot f_2(x_3, \ldots, x_n) \oplus f_3(x_3, \ldots, x_n).$$

Т.к. $f_0(x_3, \ldots, x_n)$ не является тождественно равной 0, найдутся значения $a_3, \ldots, a_n$, при которых $f_0(a_3, \ldots, a_n) = 1$.

Обозначим $f_1(a_3, \ldots, a_n) = c_1$, $f_2(a_3, \ldots, a_n) = c_2$, $f_3(a_3, \ldots, a_n) = c_3$.

Рассмотрим

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot c_1 \oplus x_2 \cdot c_2 \oplus c_3.$$

$$g(x_1, x_2) \in [K].$$

Построим $h(x_1, x_2) = g(x_1 \oplus c_2,\, x_2 \oplus c_1) \oplus c_1 \cdot c_2 \oplus c_3$.

Т.к. $x_1 \oplus c_2 = \begin{cases} x_1,\, если\ c_2 = 0 \\ \overline{x}_1\ ,\, если\ c_2 = 1 \end{cases}$, для $x_2 \oplus c_1$ и $g(x_1 \oplus c_2,\, x_2 \oplus c_1) \oplus c_1 \cdot c_2 \oplus c_3$ аналогично, то $h(x_1, x_2) \in [K]$.

Тогда

$$h(x_1, x_2) = (x_1 \oplus c_2)(x_2 \oplus c_1) \oplus (x_1 \oplus c_2) \cdot c_1 \oplus (x_2 \oplus c_1) \cdot c_2 \oplus c_3 \oplus c_1 \cdot c_2 \oplus c_3 =$$

$$= x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \cdot c_1 \oplus x_1 \cdot c_1) \oplus (x_2 \cdot c_2 \oplus x_2 \cdot c_2) \oplus$$

$$\oplus (c_1 \cdot c_2 \oplus c_1 \cdot c_2 \oplus c_1 \cdot c_2 \oplus c_1 \cdot c_2) \oplus (c_3 \oplus c_3) = x_1 \cdot x_2.$$

Лемма доказана.