Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2010 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.______________________________

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то последовательность $\{a_n\}$

а) является бесконечно малой ☒ в) не имеет предела ☐
б) является стационарной ☐ г) имеет конечный предел ☒

2. **[3]** Пусть в графе G не менее 2 вершин и любые две вершины соединяет единственная цепь. Тогда

а) G можно правильно раскрасить двумя красками ☒
б) любое ребро G является мостом ☒
в) любая вершина G является точкой сочленения ☐
г) в G есть хотя бы две вершины степени 1 ☒

3. **[3]** Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы линейного пространства V. Если $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, то

а) подпространство $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ инвариантно относительно $\mathcal{B}$ ☒
б) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$ ☐
в) $\mathcal{A}$ – обратимый оператор ☐
г) подпространство $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ ☒

В заданиях 4–6 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

4. **[3]** Матрица самосопряженного линейного оператора пространства R^3, у которого собственные векторы, относящиеся к собственному значению 2, компланарны плоскости, заданной уравнением $2x + 2y - z = 0$, а оставшийся собственный вектор относится к собственному значению 3, в исходном базисе имеет вид

а) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 19 & -2 & -2 \\ -2 & 22 & 4 \\ -2 & 4 & 22 \end{pmatrix}$ ☐ б) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ ☐ в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ г) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 22 & 4 & -2 \\ 4 & 22 & -2 \\ -2 & -2 & 19 \end{pmatrix}$ ☒

5. **[2]** Некая Сила, перемещающая объект из точки $(0;0)$ в точку $(1;1)$ на плоскости, имеет координатные составляющие (x^2, y^3). Нужно ли этой Силе заботиться о траектории перемещения, чтобы минимизировать свою работу?

а) да ☐ б) нет ☒

6. **[3]** Число точек, в которых функция $f(x) = |2\cos\frac{\pi}{2}x| - 3$ с областью определения $[0, 3]$ недифференцируема, равно

а) 0 ☐ б) 1 ☒ в) 2 ☐ г) 3 ☐ д) ∞ ☐

В заданиях 7, 8 и 10 нужно вписать в бланк ответ, а в задании 9 – решение.

7. **[3]** Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -18 \\ 9 & -18 \\ 31 & -62 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 22+3a & a \\ 48+3b & b \\ 83+3c & c \end{pmatrix}$

8. **[3]** Найдите число различных всюду определенных функций из n-элементного множества A в m-элементное множество B, имеющих трехэлементный образ.

Ответ: 0 при $m < 3$ или $n < 3$; $(3^n - 3\cdot 2^n + 3)\cdot C_m^3$ иначе

9. **[3]** Используя метод резолюций в логике предикатов, проверить логичность следующих рассуждений: Все высокие новогодние елки – генномодифицированные или завезены из Занзибара. Каждая занзибарская елка почему-то пахнет кокосом. Новогодняя елка на площади 1905 г. высокая и кокосом не пахнет. Следовательно, эта елка – генномодифицированная.

Решение:

F_1: $\neg V(x) \vee G(x) \vee Z(x)$

F_2: $G(a) \wedge S(a)$

F_3: $V(a) \wedge \neg C(a)$

$\neg G$: $\neg G(a)$

$\neg V(x) \vee G(x) \vee Z(x); V(a); G(a) \vee Z(a); \neg Z(x) \vee C(x); G(a) \vee C(a); \neg C(a); G(a); \neg G(a); \square$

10. **[3]** Множество C вершин графа G, такое что каждое ребро в G инцидентно хотя бы одной вершине из C, называется *вершинным покрытием*. Рассмотрим жадный алгоритм построения вершинного покрытия:

1 положить $C = \varnothing$;

2 пока G – не пустой граф, повторять

3 выбрать в G вершину v максимальной степени и положить $C = C + v$; $G = G - v$.

Приведите пример графа, для которого этот алгоритм строит не наименьшее по числу вершин вершинное покрытие.

Ответ:

Группа **КН-40_**   Ф.И.О.______________________________

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

11. **[3]** В городе N-ске имеется N трамвайных маршрутов. Каждый маршрут описывается упорядоченным набором остановок. Достигнув конечной остановки, трамвай возвращается в начальную. В городе нет кольцевых маршрутов. Стоимость проезда во всех маршрутах одинакова и не зависит от количества остановок. Требуется доехать от остановки A до остановки B, затратив наименьшее количество денег. Предложите модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм, который определил бы самый экономный маршрут от пункта A до пункта B.

Решение:

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2010 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то последовательность $\{a_n\}$ может

а) быть бесконечно малой ☒ в) быть бесконечно большой ☒
б) быть стационарной ☒ г) иметь конечный предел ☒

2. **[3]** Пусть в графе G вершины u и v связаны, и любой (u, v)-маршрут проходит через некоторую вершину a $(a \neq u, v)$. Тогда

а) в G найдется мост, инцидентный вершине a ☐
б) через вершину a не проходит ни один из циклов графа G ☐
в) граф G не является гамильтоновым ☒
г) вершины u и v находятся в разных компонентах двусвязности графа G ☒

3. **[3]** Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы линейного пространства V. Если $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, то

а) подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ инвариантно относительно $\mathcal{B}$ ☒
б) $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$ ☐
в) $\mathcal{B}$ – обратимый оператор ☐
г) подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ ☒

В заданиях 4–6 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

4. **[3]** Матрица самосопряженного линейного оператора пространства R^3, у которого собственный вектор, относящийся к собственному значению 2, коллинеарен прямой, заданной уравнениями $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}$, а оставшиеся собственные векторы относятся к собственному значению 1, в исходном базисе имеет вид

а) $\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 59 & 12 & -15 \\ 12 & 66 & -20 \\ -15 & -20 & 75 \end{pmatrix}$ ☐ б) $\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 59 & 12 & 15 \\ 12 & 66 & 20 \\ 15 & 20 & 75 \end{pmatrix}$ ☒ в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ г) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 34 & 12 & -15 \\ 12 & 41 & -20 \\ -15 & -20 & 50 \end{pmatrix}$ ☐

5. **[2]** Некая Сила, перемещающая объект из точки $(0; 0)$ в точку $(1; 1)$ на плоскости, имеет координатные составляющие $(x-y, x+y)$. Нужно ли этой Силе заботиться о траектории перемещения, чтобы минимизировать свою работу?

а) да ☒ б) нет ☐

6. **[3]** Число точек, в которых функция $f(x) = |\pi \sin 3x|+1$ с областью определения $[0,3]$ недифференцируема, равно

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) 2 ☒ г) 3 ☐ д) ∞ ☐

В заданиях 7, 8 и 10 нужно вписать в бланк ответ, а в задании 9 – решение.

7. **[3]** Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 5+2a & a \\ 13+2b & b \\ 20+2c & c \end{pmatrix}$

8. **[3]** Найдите число способов соединить n точек так, чтобы каждая была соединена ровно с $n-2$ другими.

Ответ: 0 при нечетном n, $\dfrac{n!}{(n/2)!}$ при четном n

9. **[3]** Используя метод резолюций в логике предикатов, доказать логичность следующих рассуждений: Любой сотрудник ГИБДД — веселый и добрый человек. Некий сотрудник ГИБДД даже помогает старушкам переходить дорогу. Все добрые люди — масоны. Следовательно, какой-то масон помогает старушкам переходить дорогу.

Решение:

F_1: $\neg G(x) \vee (V(x) \wedge D(x))$
F_2: $G(a) \wedge S(a)$
F_3: $\neg D(x) \vee M(x)$
$\neg G$: $\neg M(x) \vee \neg S(x)$

$G(a); \neg G(x) \vee D(x); D(a); \neg D(x) \vee M(x); M(a); \neg M(x) \vee \neg S(x); \neg S(a); S(a); \square$

10. **[3]** Пусть в сети G есть ребра с отрицательными весами и нет контуров отрицательной длины. Рассмотрим следующий алгоритм нахождения кратчайшего (s,t)-пути, имеющий сложность $O(n^2)$:

1 пусть K – максимум из абсолютных величин весов ребер сети G;
2 вес каждого ребра сети G увеличить на K, получая сеть Γ;
3 алгоритмом Дейкстры найти в Γ кратчайший (s,t)-путь и выдать его в качестве ответа.

Приведите пример, когда этот алгоритм неправильно определит кратчайший (s,t)-путь в G.

Ответ:

Группа **КН-40 _** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

11. **[3]** В городе N-ске продаются наборы из N детских кубиков, на каждой из 6 граней которых написана буква. Дано слово из M букв. Спрашивается, можно ли из заданного набора кубиков составить заданное слово. Предложите модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения.

Решение:

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2010 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.______________________________

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то последовательность его частичных сумм

а) является бесконечно малой ☐ в) не имеет предела ☐
б) является стационарной ☐ г) имеет конечный предел ☒

2. **[3]** Обыкновенные графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ будут изоморфны, если

а) существует биекция $f : V_1 \to V_2$ такая, что для любых вершин $u, v \in V_1$ эти вершины несмежны тогда и только тогда, когда несмежны их образы ☒
б) сумма степеней вершин графа G_1 равна сумме степеней вершин графа G_2 ☐
в) матрицу смежности графа G_1 можно перестановкой строк превратить в матрицу смежности графа G_2 ☐
г) G_1 и G_2 — полные графы, и $|E_1| = |E_2|$ ☒

3. **[3]** Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор линейного пространства V. Если $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, то

а) 2 является собственным значением $\mathcal{A}$ ☐ в) $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ ☐
б) $\mathcal{A}$ является оператором простой структуры ☒ г) $\operatorname{Im}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ ☒

В заданиях 4–6 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

4. **[3]** Матрица ортогонального линейного оператора пространства R^3, у которого все собственные значения — действительные числа и собственный вектор, относящийся к собственному значению 1 кратности 1, коллинеарен прямой, заданной уравнениями $\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-7}{-1}$, в исходном базисе имеет вид

а) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ ☒ б) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ ☐ в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ г) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

5. **[2]** Некая Сила, перемещающая объект из точки $(0; 0)$ в точку $(1; 1)$ на плоскости, имеет координатные составляющие $(x+y, x-y)$. Нужно ли этой Силе заботиться о траектории перемещения, чтобы минимизировать свою работу?

а) да ☐ б) нет ☒

6. **[3]** Число точек, в которых функция $f(x) = |5\sin\dfrac{x}{\pi}|+5$ с областью определения $[0,3]$ недифференцируема, равно

а) 0 ☒ б) 1 ☐ в) 2 ☐ г) 3 ☐ д) ∞ ☐

В заданиях 7, 8 и 10 нужно вписать в бланк ответ, а в задании 9 – решение.

7. **[3]** Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 9 & -23 \\ -60 & 18 & -46 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 144-3a & -55-3b & 112-3c \\ a & b & c \end{pmatrix}$

8. **[3]** Найдите число различных циклов длины k в полном двудольном графе $K_{m,n}$.

Ответ: 0 при нечетном k или $k > \min\{2n, 2m\}$; $\dfrac{n!m!}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}\right)!}$ иначе

9. **[3]** Используя метод резолюций в логике предикатов, доказать логичность следующих рассуждений: Все черные кошки умеют ловить мышей или музыкально мурлыкают. Все музыкально мурлыкающие кошки питаются исключительно Вискасом. Черная кошка Мурка ест только свежее мясо. Следовательно, Мурка умеет ловить мышей.

Решение:

F_1: $B(x) \vee M(x) \vee Mu(x)$

F_2: $\neg Mu(x) \vee V(x)$

F_3: $B(m) \wedge \neg V(m)$

$\neg G$: $\neg M(m)$

$\neg B(x) \vee M(x) \vee Mu(x); B(m); M(m) \vee Mu(m); \neg Mu(x) \vee V(x); M(m) \vee V(m);$
$\neg V(m); M(m); \neg M(m); \square$

10. **[3]** Рассмотрим следующий алгоритм построения наибольшего по числу ребер паросочетания в двудольном графе:

1 положить $M = \varnothing$;
2 сформировать из ребер очередь в произвольном порядке;
3 пока очередь не пуста, повторять
4 извлечь ребро e из очереди;
5 если e несмежно с ребрами из M, добавить его к M.

Приведите пример, когда алгоритм не построит наибольшее по числу ребер паросочетание.

Ответ:

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

11. **[3]** Всем известны правила игры «в города»: первый игрок называет произвольный город, следующий – город, название которого начинается на ту же букву, на которую заканчивается название предыдущего города, и т. д. В городе N-ске при игре в города создают список разрешенных к упоминанию городов; города в нем могут повторяться. В процессе игры необходимо назвать все города из списка, причем каждый из них – столько раз, сколько он записан. Предложите математическую модель этой задачи, как задачи на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения.

Решение:

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2010 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Последовательность частичных сумм расходящегося ряда может

а) быть бесконечно малой ☐ в) быть бесконечно большой ☒
б) быть стационарной ☐ г) иметь конечный предел ☐

2. **[3]** Граф G будет планарным, если

а) в G не более восьми рёбер ☒
б) G можно уложить на бесконечном цилиндре ☒
в) в G не более $3n-6$ рёбер, где n — количество вершин ☐
г) в G нет подграфов K_5 и $K_{3,3}$ ☐

3. **[3]** Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор линейного пространства V. Если $\mathcal{A}^2 = \mathcal{E}$, то

а) 5 является собственным значением $\mathcal{A}$ ☐
б) $\mathcal{A}$ является оператором простой структуры ☒
в) $\mathcal{A}$ – обратимый оператор ☒
г) $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{E} + \mathcal{A})$ ☐

В заданиях 4–6 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

4. **[3]** Матрица ортогонального линейного оператора пространства R^3, у которого все собственные значения — действительные числа и собственные векторы, относящиеся к собственному значению 1 кратности 2, компланарны плоскости, заданной уравнением $2x - y + 2z = 0$, в исходном базисе имеет вид

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ б) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 8 \\ -4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ ☐ в) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ☒ г) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

5. **[2]** Некая Сила, перемещающая объект из точки $(0;0)$ в точку $(1;1)$ на плоскости, имеет координатные составляющие (y, x^2). Нужно ли этой Силе заботиться о траектории перемещения, чтобы минимизировать свою работу?

а) да ☒ б) нет ☐

6. **[3]** Число точек, в которых функция $f(x) = |\pi^2 \cos\dfrac{\pi x}{6}|+1$ с областью определения $[0,3]$ недифференцируема, равно

а) 0 ☒ б) 1 ☐ в) 2 ☐ г) 3 ☐ д) ∞ ☐

В заданиях 7, 8 и 10 нужно вписать в бланк ответ, а в задании 9 – решение.

7. **[3]** Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 33 & -33 \\ 27 & -99 & 99 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -25+2a & 99+2b & -91+2c \\ a & b & c \end{pmatrix}$

8. **[3]** Найдите число различных (не обязательно всюду определенных) сюръективных функций из $(n{+}1)$-элементного множества A в n-элементное множество B.

Ответ: $C_n^2 n! + (n{+}1)!$

9. **[3]** Используя метод резолюций в логике предикатов, доказать логичность следующих рассуждений: Все студенты, кроме симпатичных девушек и буддистов, верят в Деда Мороза. Симпатичные девушки общаются только с отличниками. Борис плохо учится и буддисты с ним не общаются. Следовательно, любой студент, общающийся с Борисом, верит в Деда Мороза.

Решение:

F_1: $\neg S(x) \vee G(x) \vee B(x) \vee M(x)$

F_2: $\neg G(x) \vee \neg O(x,y) \vee Ot(y)$

F_3: $\neg Ot(b) \wedge (\neg B(x) \vee \neg O(x,b))$

$\neg G$: $S(a) \wedge O(a,b) \wedge \neg M(a)$

$\neg S(x) \vee G(x) \vee B(x) \vee M(x); S(a); G(a) \vee B(a) \vee M(a); \neg M(a); G(a) \vee B(a);$
$\neg G(x) \vee \neg O(x,y) \vee Ot(y); B(a) \vee \neg O(a,y) \vee Ot(y); \neg Ot(b); B(a) \vee \neg O(a,b);$
$\neg B(x) \vee \neg O(x,b); \neg O(a,b); O(a,b); \Box$

10. **[3]** Рассмотрим жадный алгоритм решения задачи коммивояжера:

1 упорядочить ребра по возрастанию веса и положить $T = \varnothing$;

2 пока $|T| < n{-}1$, добавлять в T очередное по весу ребро, не образующее цикла с уже имеющимися и не приводящее к появлению в T вершины степени 3;

3 добавить в T ребро, замыкающее цикл.

Приведите пример, когда маршрут T, построенный этим алгоритмом, не является оптимальным маршрутом коммивояжера.

Ответ:

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

11. **[3]** N-ская городская Дума состоит из N человек. В Думе сформировано M комиссий. Некоторые члены Думы являются членами нескольких комиссий. Требуется в каждой из них выбрать председателя так, чтобы ни один человек не был председателем более чем в одной комиссии. Предложите математическую модель этой задачи, как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения.

Решение: