



Государственный экзамен на степень бакалавра
по направлению: математика и компьютерные науки; 2018 г.

Группа **КН-40** _____ Ф.И.О. _____

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, нужно выбрать единственный правильный ответ. Неправильный ответ на такое задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа – в 0 баллов.

1. [3] Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^n для произвольного n .

Ответ:

2. [3] Найти ортогональный базис ортогонального дополнения к подпространству M пространства \mathbb{R}^4 , где $M = \langle \mathbf{f}_1 = (1, -1, 2, 3), \mathbf{f}_2 = (1, 2, -1, 1), \mathbf{f}_3 = (2, 1, 1, 4), \mathbf{f}_4 = (1, -4, 5, 5) \rangle$.

Ответ:

3. [3] Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{(\pi/2)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \dots + (-1)^{2n-1} \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ равна

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) $\pi/4$ ☐ г) $\pi/3$ ☐ д) другому значению ☐

4. [3] Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{1+x^2+y^2} dy$

Ответ:

5. [3] Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ при $x = 0, y = 0, z = 1$, если $x + y + z = \cos(xz)$.

Ответ:

6. [3] Найдите язык, порождаемый грамматикой $S \rightarrow cT, T \rightarrow aTc \mid aBc \mid B, B \rightarrow Bb \mid b$.

Ответ:

7. [3] Формализовать следующее рассуждение в терминах логики предикатов и проверить его логичность методом резолюций:

Брадобреи бреют всех людей, которые не бреются сами, и не бреют тех, кто бреется сам. Следовательно, брадобреев не существует.

Ответ:

8. [3] Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ представлена орграфом.

Ответ:

Найти число изоморфизмов этого орграфа на себя.

9. [3] Иван Иванович и Иван Никифорович управляли одной фирмой, но разругались и назначили каждый вместо себя по кризис-менеджеру. Терпение Ивана Ивановича и терпение Ивана Никифоровича — величины независимые. Время увольнения каждого менеджера — непрерывная случайная величина, плотность одной равна $2e^{-2t}$, а другой — $3e^{-3t}$. Предполагая, что увольнение любого кризис-менеджера означает закрытие фирмы, найти плотность случайной величины — времени закрытия фирмы с момента назначения кризис-менеджеров.

Ответ:

10. [3] На плоскости заданы и пронумерованы n точек. Рассмотрим следующий алгоритм построения маршрута коммивояжера.

1. Составить список из всех точек; взять первую точку из списка
2. Если список пуст, соединить последнюю добавленную точку с первой и остановиться
3. Иначе выбрать из списка точку, ближайшую к последней добавленной, и добавить ее в маршрут после последней добавленной точки
4. Удалить добавленную точку из списка, перейти на шаг (2).

Привести пример, когда предложенный алгоритм найдет неоптимальный маршрут.

Ответ:

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

11. [3] В Сладколэнде в центральном парке культуры и отдыха имени Сникерса Марсовича Баунти есть всемирно известный аттракцион. Он представляет из себя лабиринт из N комнат, соединенных друг с другом проходами; никакие два прохода не соединяют одни и те же комнаты. Карта этого лабиринта, конечно же, известна и висит на входе, подписанная главным пожарным инспектором Сладколэнда. У лабиринта один вход и один выход, которые друг с другом не совпадают.

В каждой из комнат в очень красивой вазе лежит ровно одна шоколадка. Разумеется, когда ребенок попадает в такую комнату, он эту шоколадку находит и тут же съедает. Если конфеты в вазе не оказывается, ребенок обычно устраивает скандал и закатывает истерику. Администрация парка не заинтересована в таком исходе.

Помогите менеджеру аттракциона определить максимальную численность команды детей, которых он может отправить внутрь лабиринта так, чтобы все дети остались довольны, и не случилось истерик из-за отсутствия конфет. При этом менеджер может каждому ребенку выдать индивидуальный маршрут перемещений по лабиринту, и может быть уверен, что ребенок ему последует.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность $O(N^3)$.

Решение:

Государственный экзамен на степень бакалавра
по направлению: математика и компьютерные науки; 2018 г.

Группа **КН-40** _____ Ф.И.О. _____

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, нужно выбрать единственный правильный ответ. Неправильный ответ на такое задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа – в 0 баллов.

1. [3] Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^n для произвольного n .

Ответ:

2. [3] Найти ортогональный базис ортогонального дополнения к подпространству M пространства \mathbb{R}^4 , где $M = \langle \mathbf{f}_1 = (-1, 2, 1, 0), \mathbf{f}_2 = (1, 1, -1, 1), \mathbf{f}_3 = (0, 3, 0, 1), \mathbf{f}_4 = (-3, 3, 3, -1) \rangle$.

Ответ:

3. [3] Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} = 1 + \pi + \frac{\pi^2}{2!} + \dots + \frac{\pi^n}{n!} + \dots$ равна

а) 2π ☐ б) π^2 ☐ в) e^π ☐ г) π^e ☐ д) другому значению ☐

4. [3] Вычислить интеграл $\iint_G y \, dx dy$, где $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq x\}$

Ответ:

5. [3] Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ при $x = 1, y = 0, z = 1$, если $\ln(2y + z) = x^2 + y^2 - z$.

Ответ:

6. [3] Найдите язык, порождаемый грамматикой $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aTa \mid bTb, T \rightarrow aTc \mid aTcc \mid \lambda$.

Ответ:

7. [3] Формализовать следующее рассуждение в терминах логики предикатов и проверить его логичность методом резолюций:

Для любого множества x существует множество y такое, что мощность y больше мощности x . Если x включено в y , то мощность x не больше мощности y . Всякое множество включено в V . Следовательно, V — не множество.

Ответ:

8. [3] Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 7 & 1 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ представлена орграфом.

Ответ:

Найти число изоморфизмов этого орграфа на себя.

9. [3] В каждой из трех групп студентов имеется 10 отличников и 8 двоечников. Декан наудачу выбирает студента первой группы и переводит во вторую, после этого наудачу выбирает студента второй группы и переводит в третью, после чего наудачу выбирает студента третьей группы и отчисляет. Найти вероятность того, что декан отчислит отличника.

Ответ:

10. [3] В задаче о рюкзаке из заданного множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес» требуется отобрать подмножество с максимальной суммарной стоимостью, соблюдая при этом ограничение на суммарный вес. Рассмотрим следующий алгоритм решения этой задачи.

1. Отсортировать предметы по убыванию удельной ценности (отношения ценности к весу)

2. Пока список предметов не пуст, повторять:

удалить первый элемент списка;

если этот элемент помещается в рюкзак, добавить его туда

3. Вернуть список предметов в рюкзаке и остановиться.

Приведите пример, когда предложенный алгоритм найдет неоптимальное решение.

Ответ:

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

11. [3] Начинаящий, но весьма мудрый спелеолог Комбинаторов–Алгоритмов (для краткости будем называть его Мудрый КА) отправился покорять пещеру, находившуюся неподалеку от его родного города. Пещера была очень интересной, с большим количеством гротов и лазов между ними. Лазы между гротами были разные: какие-то можно было пройти в полный рост, а где-то они были настолько узкими, что пролезть через них вряд ли представлялось возможным. Пещера имела два выхода на поверхность и Мудрый КА очень хотел пропутешествовать по гротам непременно от одного выхода до второго. Карту гротов, а также информацию о ширине каждого лаза Мудрый КА узнал заранее. И конечно он предпочел бы путешествовать по пещере максимально комфортно, используя лазы побольше.

Помогите Мудрому КА стать еще мудрее, а именно, найти такой вариант путешествия между выходами из пещеры, в котором самый узкий лаз был бы максимально широк.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность не больше $O(n^2)$, где n — число гротов.

Решение:



Государственный экзамен на степень бакалавра
по направлению: математика и компьютерные науки; 2018 г.

Группа **КН-40** _____ Ф.И.О. _____

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, нужно выбрать единственный правильный ответ. Неправильный ответ на такое задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа – в 0 баллов.

1. **[3]** Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^n для произвольного n .

Ответ:

2. **[3]** Найти ортогональный базис ортогонального дополнения к подпространству M пространства \mathbb{R}^4 , где $M = \langle \mathbf{f}_1 = (1, -2, 3, -1), \mathbf{f}_2 = (-2, 4, -5, 3), \mathbf{f}_3 = (-1, 2, -2, 2), \mathbf{f}_4 = (4, -8, 11, -5) \rangle$.

Ответ:

3. **[3]** Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/2)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{(\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + \dots$ равна

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) $1/2$ ☐ г) $1/4$ ☐ д) другому значению ☐

4. **[3]** Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{1+x^2+y^2} dy$

Ответ:

5. **[3]** Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ при $x = 1, y = 0, z = -1$, если $\sin(yz) = x^2 + y + z$.

Ответ:

6. [3] Найдите язык, порождаемый грамматикой $S \rightarrow aT \mid \lambda, T \rightarrow K \mid C, K \rightarrow aKbb \mid bb, C \rightarrow bC \mid \lambda$.

Ответ:

7. [3] Формализовать следующее рассуждение в терминах логики предикатов и проверить его логичность методом резолюций:

У всякого, кто не надевает шапочку в бассейне, выпадают волосы. Нет такого лысого человека, который не носит портфель. Амвросий носит только авоську. Следовательно, он надевает шапочку в бассейне.

Ответ:

8. [3] Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ представлена орграфом. Найти число изоморфизмов этого орграфа на себя.

Ответ:

9. [3] В квадрате $ABCD$ со стороной x на сторону AB бросают точку, а на сторону BC — еще одну точку независимо от первой. Считая, что и в том, и в другом случае распределение точек равномерно, найдите математическое ожидание и дисперсию расстояния между этими точками.

Ответ:

10. [3] В сети (V, E, c, w) с источником и стоком каждое ребро e имеет пропускную способность $c(e)$ и стоимость прохождения единицы потока $w(e)$. Поток f имеет стоимость $\sum_{e \in E} f(e)w(e)$. Рассмотрим следующий алгоритм построения в сети максимального потока минимальной стоимости.

1. Текущий поток f положить равным нулю на каждом ребре

2. Пока существует f -дополняющий путь, повторять:

взять минимальный по стоимости f -дополняющий путь p ;

положить $f(e) = f(e) + \delta(p)$ на всех ребрах из p , где $\delta(p)$ — текущая пропускная способность p

3. Вернуть f и остановиться.

Приведите пример, когда предложенный алгоритм найдет неоптимальное решение.

Ответ:

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

11. [3] После очередной малоприятной встречи с Ильей Муромцем n -главый Змей Горыныч пришел в магазин «Новая глава», который в избушке на курьих ножках держит Баба-яга. Благо, встречи с Ильей Муромцем у Горыныча случаются часто, и программа лояльности, да и акция «Каждая вторая голова по цене каждой первой», сулят хорошие условия. На этот раз Змей после встречи с Илюшей не досчитался k голов ($k < n$). Поскольку Горыныч с детства болеет ящером, не каждая голова из ассортимента магазина Яги подходит каждой шее Змея. У него даже имеется сертификат соответствия, в котором прописано, какой шее какая голова подходит (прямо вот артикулы подходящих голов для каждой шеи указаны в точном соответствии с ассортиментом). Разумеется, ситуация не зашла настолько далеко, чтобы каждой шее соответствовала единственная голова, да и одна голова вполне может подойти нескольким шеям. Поэтому у Змея есть выбор. Однако, операции по приживлению головы не бесплатны, и поэтому Змей Горыныч хочет сэкономить на покупке голов, а головы тоже недешевы, поскольку Баба-Яга — монополист.

В принципе, если каких-то голов нет в наличии, то их могут привезти, но тогда это Змею будет стоить очень дорого, и ему придется (к счастью, только в этом случае) брать кредит в банке «Чех.Net» у Коцея Бессмертного. Помогите Змею Горынычу выбрать самый дешевый набор голов в сложившейся ситуации и понять, сможет ли он обойтись без кредита.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность не более $O(n^4)$.

Решение:



Государственный экзамен на степень бакалавра
по направлению: **математика и компьютерные науки; 2018 г.**

Группа **КН-40** _____ Ф.И.О. _____

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, нужно выбрать единственный правильный ответ. Неправильный ответ на такое задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа – в 0 баллов.

1. **[3]** Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A^n для произвольного n .

Ответ:

2. **[3]** Найти ортогональный базис ортогонального дополнения к подпространству M пространства \mathbb{R}^4 , где $M = \langle f_1 = (2, 4, 1, 3), f_2 = (1, 2, 3, 4), f_3 = (3, 6, 4, 7), f_4 = (3, 6, -1, 2) \rangle$.

Ответ:

3. **[3]** Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\frac{e}{\pi})^n}{n} = \left(\frac{e}{\pi}\right) - \frac{(\frac{e}{\pi})^2}{2} + \frac{(\frac{e}{\pi})^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(\frac{e}{\pi})^n}{n} + \dots$ равна

а) e/π ☐ б) $e^{-1/\pi}$ ☐ в) $\ln(1 + e/\pi)$ ☐ г) $1/2$ ☐ д) другому значению ☐

4. **[3]** Вычислить интеграл $\iint_G x \, dx dy$, где $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x\}$

Ответ:

5. **[3]** Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ при $x = 1, y = 0, z = 0$, если $x^2 + y^2 + z = e^{yz}$.

Ответ:

6. [3] Найдите язык, порождаемый грамматикой $S \rightarrow aC \mid cA, C \rightarrow aCC \mid cS \mid c, A \rightarrow cAA \mid aS \mid a$.

Ответ:

7. [3] Формализовать следующее рассуждение в терминах логики предикатов и проверить его логичность методом резолюций:

Из всех математиков только алгебраисты и топологи знают, как пройти в библиотеку. Алгебраисты общаются только с масонами. Антон не масон, а топологи с ним не общаются. Следовательно, всякий математик, общающийся с Антоном, не знает, как пройти в библиотеку.

Ответ:

8. [3] Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 7 & 1 & 5 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ представлена орграфом.

Ответ:

Найти число изоморфизмов этого орграфа на себя.

9. [3] В квадрате $ABCD$ со стороной x на сторону AB бросают точку, а на сторону CD — еще одну точку независимо от первой. Считая, что и в том, и в другом случае распределение точек равномерно, найдите математическое ожидание и дисперсию расстояния между этими точками.

Ответ:

10. [3] В полном двудольном взвешенном графе, в каждой из долей которого содержится n вершин, требуется построить полное паросочетание минимального веса. Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Положить $M := \emptyset$; упорядочить ребра по возрастанию весов

2. Пока M содержит менее n ребер, повторять

- считать очередное ребро e , удалить его из списка;
- если e не пересекается ни с одним ребром из M , добавить его к M

3. Вернуть M и остановиться.

Привести пример, когда предложенный алгоритм найдет неминимальное паросочетание.

Ответ:

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

11. [3] Вы слышали историю про Минотавра? Рассказывали, что это было чудовище в образе человека с головой быка, и ему время от времени привозили по семь юношей и семь девушек то ли на съедение, то ли для того, чтобы он, сидя в своем Кносском лабиринте, развлекался, наблюдая за тщетными попытками пленников найти выход. Так или иначе, в узлах лабиринта накопилось немало пленников, и посетивший Кносский лабиринт по своим делам Тесей взялся за квест «выведи всех пленников наружу». Как известно, Тесей был читером и использовал нить, которую ему подкинула Ариадна — дочь царя Миноса. Разумеется, нить недешевая. И хоть Ариадна на этот раз разрешила Тесею резать ее, если понадобится, но, конечно, хотелось бы нить сэкономить, мало ли где она еще пригодится.

Задача Тесея была проста как три коринфских статера: войти в лабиринт, добраться до всех его узлов и вернуться обратно. Поскольку ориентиров в лабиринте мало, вдоль всех пройденных переходов должны были лежать отрезки нити Ариадны (каждый отрезок должен был соединить два соседних узла лабиринта). Таблицу расстояний между узлами, соединенными проходами непосредственно, у Минотавра удалось выкрасть во время одной из предыдущих командировок. Для некоторых пар узлов в таблице стоял загадочный знак ∞ , и Тесей на всякий случай считал, что прохода там нет.

Помогите Тесею решить его задачу и израсходовать при этом минимальную длину нити Ариадны. Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность $O(n^2)$.

Решение: