Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2011 г.

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Даны функции $f(x) = \ln(\sin x^2 + e^{x^2})$ и $g(x) = \sin(2x^2 + 3x^3)$. Тогда при $x \to 0$

а) функции f и g имеют один порядок малости	☒	в) $f = o(g)$	☐
б) порядки малости функций f и g не сравнимы	☐	г) $g = o(f)$	☐

2. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

	верно	неверно
(2.1) **[1]** Если для некоторой задачи из класса NP существует полиномиальный алгоритм, то $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$	☐	☒
(2.2) **[1]** Если к задаче Z можно свести за полиномиальное время задачу об эйлеровом цикле, то Z не является NP-полной задачей	☐	☒
(2.3) **[1]** Любое множество простых чисел является рекурсивно перечислимым множеством	☐	☒

3. **[2]** Вектор $\vec{a} = (6, 11, \lambda, 9)^{\mathrm{т}}$ принадлежит образу линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в том же базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 12 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Тогда значение λ равно

а) -4 ☐ б) 8 ☐ в) 4 ☒ г) -8 ☐

4. **[3]** Подпространство U пространства $\mathbb{R}^5$ является множеством решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 & = 0\,, \end{cases}$$

а подпространство W — линейной оболочкой векторов $\vec{a} = (-3, -2, 6, 1, 2)^{\mathrm{т}}$, $\vec{b} = (3, 2, 3, -1, 1)^{\mathrm{т}}$ и $\vec{c} = (3, 1, -3, 2, 1)^{\mathrm{т}}$. Тогда размерность подпространства $U + W$ равна

а) 2 ☐ б) 3 ☐ в) 4 ☒ г) 5 ☐

5. **[3]** Квадрика $6x^2 + 6y^2 + 8xy + 4xz + 2yz = 0$ и плоскость $z = 2$ пересекаются по

а) параболе ☐ б) эллипсу ☒ в) гиперболе ☐ г) другой линии ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[3]** Функция z аргументов x и y задана системой уравнений $\begin{cases} x = uv \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$. Выразите частные производные этой функции через параметры u и v.

Ответ: $z'_x = \dfrac{3uv}{u+v}, \quad z'_y = \dfrac{u^2+uv+v^2}{u+v}$

7. **[3]** Неоднородной жидкостью непонятного происхождения заполнен закрытый сосуд, стенки которого заданы уравнениями $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$. Найти массу жидкости, если её плотность задана функцией $\mu(x,y,z) = 5(x^2+y^2)/2$.

Ответ: 8π

8. **[3]** Пусть T_1, S, L — соответственно множества сохраняющих единицу, самодвойственных и линейных булевых функций. Сколько различных функций n переменных принадлежит множеству $L \cap T_1 \cap S$?

Ответ: 2^{n-1}

9. **[3]** Для грамматики

$$\mathsf{S} \to \mathsf{AC},\ \mathsf{A} \to \mathsf{aAb} \mid \varepsilon,\ \mathsf{bC} \to \mathsf{bbc},\ \mathsf{cC} \to \mathsf{Cc},\ \mathsf{C} \to \mathsf{CC}$$

построить эквивалентную КС-грамматику или доказать, что её не существует.

Ответ: $\mathsf{S} \to \mathsf{AC},\ \mathsf{A} \to \mathsf{aAb} \mid \varepsilon,\ \mathsf{C} \to \mathsf{bCc} \mid \mathsf{bc}$

10. **[3]** Во взвешенном полном двудольном графе $K_{n,n}$ требуется построить полное паросочетание M минимального веса. Рассмотрим жадный алгоритм:

1 положить $M = \varnothing$;
2 сформировать из рёбер очередь в порядке возрастания весов;
3 пока $|M| < n$, повторять
  считать очередное ребро e из очереди; удалить e из очереди;
  если e не пересекается ни с одним ребром из M, добавить e к M.

Приведите пример, когда этот алгоритм не находит полное паросочетание минимального веса.

Ответ:

	y1	y2
x1	1	2
x2	2	10

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.______________________________________

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

11. **[3]** Самодвижущийся куб со стороной 1м, на гранях которого написаны некоторые натуральные числа, находится на плоскости Oxy, причём рёбра нижнего основания параллельны координатным осям. Куб может перемещаться по плоскости, перекатываясь без скольжения через любое из четырёх рёбер нижней грани. На одно перемещение уходит энергия отрыва, выражаемая числом, написанным на нижней (в момент отрыва) грани куба. Дана начальная ориентация куба, а также целые числа i и j. Требуется указать наиболее энергетически выгодный маршрут перемещения куба из исходного положения в точку, отстоящую на i метров вдоль оси Ox и на j метров вдоль Oy. Предложите модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм, строящий требуемый маршрут.

Решение: вершины графа — координаты куба вместе с его ориентацией. Решается задача о минимальном пути из начальной вершины во множество вершин с координатами (i, j).

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2011 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Даны функции $f(x) = \ln(\operatorname{tg}^3 x + e^x)$ и $g(x) = \sin(x^2 + 100x^3)$. Тогда при $x \to 0$

а) функции f и g имеют один порядок малости	☐	в) $f = o(g)$	☐
б) порядки малости функций f и g не сравнимы	☐	г) $g = o(f)$	☒

2. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

	верно	неверно
(2.1) **[1]** Если $(\mathsf{P} \cap \mathsf{NP}) \supseteq \mathsf{P}$, то задача о гамильтоновом цикле не является NP-полной	☐	☒
(2.2) **[1]** Если задачу $Z \in \mathsf{NP}$ можно за полиномиальное время свести к любой из задач из класса NP, то задача Z является NP-полной	☐	☒
(2.3) **[1]** Множество всех деревьев вывода любой контекстно-свободной грамматики является рекурсивно перечислимым множеством	☒	☐

3. **[2]** Вектор $\vec{a} = (-1, 2, 5, \lambda)^{\mathrm{т}}$ принадлежит образу линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в том же базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -7 \\ -1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$. Тогда значение λ равно

а) 4 ☐ б) 6 ☒ в) 8 ☐ г) 2 ☐

4. **[3]** Подпространство U пространства $\mathbb{R}^5$ является множеством решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + x_5 & = 0\,, \end{cases}$$

а подпространство W — линейной оболочкой векторов $\vec{a} = (-4, 1, -1, 1, 5)^{\mathrm{т}}$, $\vec{b} = (5, -1, 2, 1, -4)^{\mathrm{т}}$ и $\vec{c} = (-3, 1, 0, 3, 6)^{\mathrm{т}}$. Тогда размерность подпространства $U + W$ равна

а) 2 ☐ б) 3 ☒ в) 4 ☐ г) 5 ☐

5. **[3]** Квадрика $2x^2 + 2y^2 + 8xy + 6xz + 2yz = 0$ и плоскость $z = -2$ пересекаются по

а) параболе ☐ б) эллипсу ☐ в) гиперболе ☒ г) другой линии ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[3]** Функция z аргументов x и y задана системой уравнений $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 - v^2 \\ z = \sin 2uv \end{cases}$. Выразите частные производные этой функции через параметры u и v.

Ответ: $$z'_x = \frac{2(u^2+v^2)\cos 2uv}{u+v}, \quad z'_y = \frac{(v-u)\cos 2uv}{u+v}$$

7. **[3]** Неоднородной жидкостью непонятного происхождения заполнен закрытый сосуд, стенки которого заданы уравнениями $x^2 + y^2 = z^2/25$, $x^2 + y^2 = z/5$, $x = 0$ и $y = 0$. Найти массу жидкости, если её плотность задана функцией $\mu(x, y, z) = 14yz$.

Ответ: 10

8. **[3]** Пусть T_0, S, L — соответственно множества сохраняющих ноль, самодвойственных и линейных булевых функций. Сколько различных функций n переменных принадлежит множеству $(T_0 \cup S) \cap L$?

Ответ: $3 \cdot 2^{n-1}$

9. **[3]** Для грамматики

$$\mathsf{S} \to \mathsf{aSA} \mid \mathsf{bSB} \mid \mathsf{c},\ \mathsf{cA} \to \mathsf{ca},\ \mathsf{cB} \to \mathsf{cb},\ \mathsf{aA} \to \mathsf{Aa},\ \mathsf{aB} \to \mathsf{Ba},\ \mathsf{bA} \to \mathsf{Ab},\ \mathsf{bB} \to \mathsf{Bb}$$

построить эквивалентную КС-грамматику или доказать, что её не существует.

Ответ: КС-грамматики не существует, так как данная грамматика порождает не контекстно-свободный (ввиду леммы о накачке) язык $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

10. **[3]** Рассмотрим следующий жадный алгоритм нахождения кратчайшего (s, t)-пути во взвешенном орграфе:

1 инициализировать стек вершиной s;

2 пока верхняя вершина v стека не совпадает с t, повторять:

  среди рёбер вида (v, w), где w нет в стеке, найти ребро наименьшего веса и добавить w в стек; если таких рёбер нет, остановиться;

3 если наверху стека лежит вершина t, стек задаёт искомый (s, t)-путь.

Приведите пример графа, в котором приведённый алгоритм неправильно найдёт кратчайший (s, t)-путь или вообще не найдёт (s, t)-путь, хотя такой в графе существует.

Ответ:

	s	x	t
s		1	2
x			
t			

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

11. **[3]** Платон упоминает, что Атлантида была разделена на N областей, приводит список этих областей и списки соседних областей для каждой области. Требуется определить, возможно ли покрасить карту Атлантиды только в Цвета Атлантиды — красный и синий — так, чтобы любые две соседние области были разного цвета. Предложите модель этой задачи как задачи на графе и опишите (неформально) алгоритм, определяющий искомую раскраску карты, либо сообщающий, что такая раскраска невозможна.

Решение: это задача о 2-раскраске (или о проверке двудольности).

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2011 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Даны функции $f(x) = \ln(100 + x^2)$ и $g(x) = \ln(1 + x^{100})$. Тогда при $x \to \infty$

а) функции f и g — бесконечно большие одного порядка	☒	в) $f = o(g)$	☐
б) порядки роста функций f и g не сравнимы	☐	г) $g = o(f)$	☐

2. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

	верно	неверно
(2.1) **[1]** Если включение $\mathsf{NP} \subset \mathsf{P}$ между классами сложности строгое, то задача вычисления определителя матрицы решается за линейное время	☒	☐
(2.2) **[1]** Если задачу Z можно свести за время $O(n^2)$ к проверке двудольности графа, то $Z \in \mathsf{P}$	☒	☐
(2.3) **[1]** Для любого недетерминированного конечного автомата множество всех слов, которые в нём можно прочесть более чем двумя способами, рекурсивно	☒	☐

3. **[2]** Вектор $\vec{a} = (-4, \lambda, 1, 3)^{\mathsf{T}}$ принадлежит образу линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в том же базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -7 & 11 & -12 \\ 8 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда значение λ равно

а) -2 ☐ б) 18 ☐ в) 2 ☐ г) -18 ☒

4. **[3]** Подпространство U пространства $\mathbb{R}^5$ является множеством решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 7x_5 & = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 & = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_5 & = 0\,, \end{cases}$$

а подпространство W — линейной оболочкой векторов $\vec{a} = (2, 5, -1, 2, 4)^{\mathsf{T}}$, $\vec{b} = (0, 3, -2, -1, 4)^{\mathsf{T}}$ и $\vec{c} = (4, -2, 2, 0, -3)^{\mathsf{T}}$. Тогда размерность подпространства $U + W$ равна

а) 2 ☐ б) 3 ☐ в) 4 ☐ г) 5 ☒

5. **[3]** Квадрика $4x^2 + 4y^2 + 8xy + 6xz - 2yz = 0$ и плоскость $z = -1$ пересекаются по

а) параболе ☒ б) эллипсу ☐ в) гиперболе ☐ г) другой линии ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[3]** Функция z аргументов x и y задана системой уравнений $\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v - \ln u \\ z = 2u + v \end{cases}$. Выразите частные производные этой функции через параметры u и v.

Ответ: $z'_x = \dfrac{2uv + v}{uv + 1}, \quad z'_y = \dfrac{uv - 2u}{uv + 1}$

7. **[3]** Неоднородной жидкостью непонятного происхождения заполнен закрытый сосуд, стенки которого заданы уравнениями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3z$, $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$. Найти массу жидкости, если её плотность задана функцией $\mu(x, y, z) = 15x$.

Ответ: 1

8. **[3]** Пусть T_1, S, L — соответственно множества сохраняющих единицу, самодвойственных и линейных булевых функций. Сколько различных функций n переменных принадлежит множеству $(L \cup S) \setminus T_1$?

Ответ: $2^{2^{n-1}-1} + 2^{n-1}$

9. **[3]** Для грамматики

$$\mathsf{S} \to \mathsf{aABc},\ \mathsf{aA} \to \mathsf{aaAA},\ \mathsf{Bc} \to \mathsf{BBcc},\ \mathsf{AB} \to \mathsf{b},\ \mathsf{bB} \to \mathsf{Bb}$$

построить эквивалентную КС-грамматику или доказать, что её не существует.

Ответ: КС-грамматики не существует, так как данная грамматика порождает не контекстно-свободный (ввиду леммы о накачке) язык $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

10. **[3]** Подпоследовательность $x_{p_1}, \ldots, x_{p_k}$ последовательности $x_1, \ldots, x_n$ назовем *разреженной*, если никакие два ее элемента не встречаются в последовательности рядом, т.е., $p_{i+1} - p_i > 1$. Требуется из последовательности целых положительных чисел выделить разреженную подпоследовательность с наибольшей суммой. Рассмотрим следующий алгоритм:

1 просуммировать подпоследовательность, состоящую из всех элементов с нечётными номерами;
2 просуммировать подпоследовательность, состоящую из всех элементов с чётными номерами;
3 вернуть ту из двух подпоследовательностей, у которой сумма больше.

Приведите пример последовательности, для которой предложенный алгоритм не находит разреженную подпоследовательность с наибольшей суммой.

Ответ: $2, 1, 1, 2$

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

11. **[3]** На карте дорог Свердловской области изображены населённые пункты и соединяющие их дороги (дороги пересекаются только в населённых пунктах). Более того, для каждой дороги указан максимальный вес грузовика, который по ней может проехать. Для заданных пунктов A и B требуется определить максимально возможный вес грузовика, который может доехать от A до B. Предложите модель этой задачи как задачи на графе и опишите (неформально) алгоритм, вычисляющий искомый вес грузовика.

Решение: решить задачу о минимальном (A, B)-пути (вес пути равен максимуму весов составляющих его рёбер).

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2011 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.________________________________

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Даны функции $f(x) = \ln(1 + 100^x)$ и $g(x) = \sqrt{1 + 3x^3}$. Тогда при $x \to \infty$

а) функции f и g — бесконечно большие одного порядка ☐ в) $f = o(g)$ ☒
б) порядки роста функций f и g не сравнимы ☐ г) $g = o(f)$ ☐

2. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

	верно	неверно
(2.1) **[1]** Если $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, то любое рекурсивное множество является рекурсивно перечислимым	☒	☐
(2.2) **[1]** Если к задаче Z можно свести за время $O(n^2)$ задачу о 3-раскраске графа, то Z является NP-полной задачей	☐	☒
(2.3) **[1]** Любое подмножество регулярного языка является рекурсивно перечислимым множеством	☐	☒

3. **[2]** Вектор $\vec{a} = (-2, 4, \lambda, 5)^{\text{т}}$ принадлежит образу линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в том же базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & 7 & 11 \\ -1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда значение λ равно

а) -14 ☐ б) 8 ☒ в) 14 ☐ г) -8 ☐

4. **[3]** Подпространство U пространства $\mathbb{R}^5$ является множеством решений системы уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 & = 0 \\ 5x_2 - 3x_4 + x_5 & = 0 \\ -11x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 10x_5 & = 0\,, \end{cases}$$

а подпространство W — линейной оболочкой векторов $\vec{a} = (1, 3, -2, 4, -3)^{\text{т}}$, $\vec{b} = (-5, 5, -8, 6, -7)^{\text{т}}$ и $\vec{c} = (4, 2, 1, 3, -1)^{\text{т}}$. Тогда размерность подпространства $U + W$ равна

а) 2 ☒ б) 3 ☐ в) 4 ☐ г) 5 ☐

5. **[3]** Квадрика $6x^2 + 6y^2 - 13xy + 6xz - 4yz = 0$ и плоскость $z = -1$ пересекаются по

а) параболе ☐ б) эллипсу ☐ в) гиперболе ☐ г) другой линии ☒

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[3]** Функция z аргументов x и y задана системой уравнений $\begin{cases} x = u + e^v \\ y = v - e^u \\ z = uv \end{cases}$. Выразите частные производные этой функции через параметры u и v.

Ответ: $z'_x = \dfrac{ue^u + v}{e^{u+v} + 1}, \quad z'_y = \dfrac{u - ve^v}{e^{u+v} + 1}$

7. **[3]** Неоднородной жидкостью непонятного происхождения заполнен закрытый сосуд, стенки которого заданы уравнениями $x^2 + y^2 = 16z^2/49$, $x^2 + y^2 = 4z/7$, $x = 0$ и $y = 0$. Найти массу жидкости, если её плотность задана функцией $\mu(x, y, z) = 80yz$.

Ответ: 7

8. **[3]** Пусть T_1, S, L — соответственно множества сохраняющих единицу, самодвойственных и линейных булевых функций. Сколько различных функций n переменных принадлежит множеству $(L \cup T_1) \cap S$?

Ответ: $2^{2^{n-1}-1} + 2^{n-1}$

9. **[3]** Для грамматики

$$\mathsf{S} \to \mathsf{aS} \mid \mathsf{SB} \mid \varepsilon,\ \mathsf{aB} \to \mathsf{acbb},\ \mathsf{bB} \to \mathsf{Bb},\ \mathsf{cB} \to \mathsf{Bc}$$

построить эквивалентную КС-грамматику или доказать, что её не существует.

Ответ: $\mathsf{S} \to \mathsf{AB} \mid \varepsilon,\ \mathsf{A} \to \mathsf{Aa} \mid \mathsf{a},\ \mathsf{B} \to \mathsf{Bcbb} \mid \mathsf{cbb}$

10. **[3]** Рассмотрим следующий алгоритм поиска кратчайшего (s, t)-пути во взвешенном орграфе с положительными весами:

1 положить множество P достижимых из s вершин равным $\{s\}$ и положить ПРЕДШ$[s] = 0$;
2 пока t не входит в P, повторять
  среди рёбер, начинающихся в P и заканчивающихся вне P, найти ребро (v, w) наименьшего веса;
  добавить w к P и положить ПРЕДШ$[w] = v$;
3 с помощью массива ПРЕДШ построить (s, t)-цепь.

Приведите пример графа, в котором этот алгоритм неправильно построит кратчайший (s, t)-путь для некоторых вершин s и t.

Ответ:

	s	x	y	t
s		1		2
x			1	
y				1
t				

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

11. **[3]** Найденный в черновиках Леонардо да Винчи чертёж детали вечного двигателя изображает N зацепленных между собой пронумерованных шестерёнок. Зная все пары зацепленных друг с другом шестерёнок, требуется выяснить, можно ли повернуть шестерёнку с номером 1. Предложите модель этой задачи как задачи на графе и опишите (неформально) алгоритм её решения.

Решение: выделить компоненту связности, содержащую первую шестеренку, и проверить её на двудольность.