



Институт математики и компьютерных наук



Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: математика, компьютерные науки; 2012 г.

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно выбрать все правильные ответы.

1. [2] Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ сходится, то последовательность $\{a_n\}$

а) является бесконечно большой ☒ в) не имеет предела ☐
б) является стационарной ☐ г) имеет конечный предел ☐

2. [3] В линейном пространстве \mathbb{R}^4 заданы подпространства

$$U = \langle (1, -2, 1, 0)^T, (2, -1, 2, 3)^T, (-1, 0, 3, -2)^T, (1, -1, 5, 1)^T \rangle \text{ и}$$
$$V = \langle (4, -5, 4, 3)^T, (-2, -1, 5, -5)^T, (0, -7, 14, -7)^T, (-2, -8, 19, -12)^T \rangle.$$

Тогда

а) $U = V$ ☐ б) $V = U + V$ ☐ в) $U = U + V$ ☒ г) $U \neq V$ ☒

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

	верно	неверно
(3.1) [1] Если язык L порождается однозначной КС-грамматикой, то он распознается детерминированным МП-автоматом	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
(3.2) [1] Множество всех слов четной длины в КС-языке является КС-языком	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(3.3) [1] Если язык L распознается недетерминированным КА с k состояниями, то он распознается детерминированным КА с не более чем k^2 состояниями	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

4. [2] Ядро линейного оператора \mathcal{A} пространства \mathbb{R}^5 совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Тогда размерность образа этого оператора равна

а) 2 ☐ б) 3 ☐ в) 4 ☒ г) 5 ☐

5. [3] Количество попарно неизоморфных обыкновенных эйлеровых графов с 5 вершинами равно

а) 3 ☐ б) 4 ☐ в) 5 ☐ г) 6 ☒

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. [3] Вычислите интеграл $\int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} y^2 \sin xy \, dy$.

Ответ: $\frac{\pi^2 - \sin \pi^2}{2}$

7. [3] Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = -x^2 + (y+1)^2 - 2xy$ на множестве $\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$.

Ответ: $1; -3$

8. [3] На множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$ заданы предикаты $S(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $x+y = z$, и $P(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $xy = z$. Через эти два предиката, не используя констант и функций, выразите предикат $R(x, y)$ на $\mathbb{N} \cup \{0\}$, истинный тогда и только тогда, когда $1 < x \leq y$.

Ответ: $\neg P(x, x, x) \wedge \exists t S(x, t, y)$

9. [3] Квадрика задана уравнением

$$x^2 + (y + 2z)^2 - 3z^2 = 1.$$

Напишите каноническое уравнение квадрики и определить ее тип.

Ответ: однополостный гиперболоид $x'^2 + 3y'^2 - z'^2 = 1$.

10. [3] Дан следующий алгоритм построения минимального остова в неориентированном связном взвешенном графе:

- 1 объявить тривиальный лес растущим и положить $T := \emptyset$;
- 2 для каждого ребра e графа в порядке возрастания весов
если e соединяет одноэлементные деревья
 слить эти два дерева в одно; пометить e как просмотренное; добавить e в T ;
- 3 для каждого непросмотренного ребра e графа в порядке возрастания весов
если e соединяет разные деревья растущего леса
 слить эти два дерева в одно; добавить e в T ;
- 4 вернуть T в качестве минимального остова.

Приведите пример, когда этот алгоритм даст неверный ответ.

Ответ:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1		1	2	∞
u_2	1		∞	2
u_3	2	∞		3
u_4	∞	2	3	

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

11. [3] Фармацевтической фирме требуется проверить n лекарств на n добровольцах. Предварительные испытания показали, что у некоторых добровольцев наблюдается аллергия на отдельные лекарства. Для каждого добровольца был составлен список лекарств, на которых у него имеется аллергия. Требуется так организовать эксперимент, чтобы каждый испытуемый получил в точности одно лекарство, причем такое, на которое у него нет аллергии, и чтобы каждое лекарство было испытано.

Предложите модель этой задачи, как задачи на графе и опишите неформально алгоритм, который позволит определить, возможно или нет провести испытания всех лекарств.

Решение: решить задачу о совершенном паросочетании в двудольном графе лекарства-добровольцы (ребро соответствует отсутствию аллергии).



Институт математики и компьютерных наук



Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: математика, компьютерные науки; 2012 г.

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно выбрать все правильные ответы.

1. [2] Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ сходится и $A_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}$, то последовательность $\{A_n\}$ может

- а) быть бесконечно малой ☐ в) быть бесконечно большой ☒
б) не иметь предела ☐ г) иметь конечный предел ☒

2. [3] В линейном пространстве \mathbb{R}^4 заданы подпространства

$$U = \langle (-1, 1, 2, -1)^T, (3, 1, -2, 0)^T, (2, 0, 1, -2)^T, (4, 2, 1, -3)^T \rangle \text{ и}$$
$$V = \langle (1, 3, 2, -2)^T, (1, 1, -3, 2)^T, (1, 1, 3, -3)^T, (2, 4, 5, -5)^T \rangle.$$

Тогда

- а) $U = U + V$ ☒ б) $V = U + V$ ☒ в) $U = V$ ☒ г) $U \neq V$ ☐

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

- | | верно | неверно |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (3.1) [1] Если язык L распознается недетерминированным МПА с k состояниями, то он распознается детерминированным МПА с не более чем 2^k состояниями | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| (3.2) [1] Для любого фиксированного k , множество всех слов длины $\geq k$ в КС-языке является КС-языком | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| (3.3) [1] Если языки L_1 и L_2 распознаются детерминированными КА с k состояниями, то язык $L_1 \cup L_2$ также распознается ДКА с k состояниями | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

4. [2] Ядро линейного оператора \mathcal{A} пространства \mathbb{R}^5 совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Тогда размерность образа этого оператора равна

- а) 4 ☐ б) 3 ☒ в) 2 ☐ г) 1 ☐

5. [3] Количество попарно неизоморфных обыкновенных гамильтоновых графов с 5 вершинами равно

- а) 6 ☐ б) 7 ☐ в) 8 ☒ г) 9 ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. [3] Вычислите интеграл $\int_0^1 dx \int_x^1 y^2 \operatorname{sh} xy \, dy$.

Ответ: $\frac{\operatorname{sh} 1 - 1}{2}$

7. [3] Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = 4x^2 - (2y - 1)^2 + 8xy$ на множестве $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Ответ: $7/2; -9$

8. [3] На множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$ заданы предикаты $S(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $x + y = z$, и $P(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $xy = z$. Через эти два предиката, не используя констант и функций, выразите предикат $R(x, y, z)$ на $\mathbb{N} \cup \{0\}$, истинный тогда и только тогда, когда $z = \operatorname{НОД}(x, y)$.

Ответ: $\exists t_1 P(z, t_1, x) \wedge \exists t_2 P(z, t_2, y) \wedge \forall s ((\exists t_3 P(s, t_3, x) \wedge \exists t_4 P(s, t_4, y)) \rightarrow \exists t_5 P(s, t_5, z))$

9. [3] Квадрика задана уравнением

$$(4x + z)^2 + 8y^2 + 15z^2 = 4.$$

Напишите каноническое уравнение квадрики и определить ее тип.

Ответ: эллипсоид $3x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2 = 1$.

10. [3] В ориентированном графе без кратных ребер и петель задана список вершин (u, v) -цепь p . Требуется построить (u, v) -цепь q , такую что:

- все ребра цепи q содержатся в p и идут в том же порядке, что и в p ;
- цепь q имеет наименьшее возможное число ребер при данных условиях.

Рассмотрим следующий алгоритм:

- 1 считывать вершины цепи p по порядку;
- 2 как только встречается цикл (вершина встретилась второй раз), удалить его;
- 3 если циклов не осталось, вернуть оставшуюся цепь в качестве q .

Приведите пример, когда этот алгоритм сработает неправильно.

Ответ: $p : u \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow x \rightarrow v$

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

11. [3] Дания — страна, расположенная на множестве мелких островков. Прошло уже много времени с того момента, когда был построен первый мост, но до сих пор сохранилась традиция прикреплять к мостам таблички с указанием даты постройки. Сейчас это государство полностью соединено мостами, и с любого острова можно попасть на любой другой, не пользуясь лодкой. Недавно жители решили добавить к большому списку национальных праздников еще один — День Объединения. Как вы, наверное, уже догадываетесь, так они решили назвать тот день, в который стало возможным перемещение между любыми двумя островами без помощи лодок. К сожалению, уже построено очень много мостов, и разобраться, когда же настал этот день, оказалось не совсем просто.

Предложите модель этой задачи как задачи на графе и опишите неформально алгоритм, который определит по списку островов и мостов с датами постройки, когда же наступил тот день, в который все острова оказались соединенными (пусть даже через другие острова) мостами.

Решение: интерпретировать дату постройки как вес ребра-моста и решить задачу о минимальном остове. Вернуть вес последнего включенного в остов ребра.



Институт математики и компьютерных наук



Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: математика, компьютерные науки; 2012 г.

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно выбрать все правильные ответы.

1. [2] Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $A_n = \sum_{i=1}^n e^{a_i}$, то последовательность $\{A_n\}$

а) является бесконечно большой ☒ в) может не иметь предела ☐
б) является ограниченной ☐ г) имеет конечный предел ☐

2. [3] В линейном пространстве \mathbb{R}^4 заданы подпространства

$$U = \langle (1, 1, 0, 1)^T, (1, -2, 2, 3)^T, (2, -1, 2, 4)^T, (4, -2, 4, 8)^T \rangle \text{ и} \\ V = \langle (2, 1, -1, -2)^T, (-1, 0, 1, 3)^T, (2, -2, 1, 0)^T, (3, -1, 1, 1)^T \rangle.$$

Тогда

а) $U = V$ ☐ б) $U \neq V$ ☒ в) $U = U + V$ ☐ г) $V = U + V$ ☒

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

	верно	неверно
(3.1) [1] Если язык L распознается МП-автоматом, то он распознается недетерминированным МП-автоматом с одним состоянием	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(3.2) [1] Множество всех слов нечетной длины в КС-языке является КС-языком	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(3.3) [1] Если язык L распознается детерминированным КА с k состояниями, то минимальный ДКА, распознающий язык \bar{L} , имеет не больше k состояний	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. [2] Ядро линейного оператора \mathcal{A} пространства \mathbb{R}^5 совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 18x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Тогда размерность образа этого оператора равна

а) 1 ☐ б) 4 ☐ в) 2 ☐ г) 3 ☒

5. [3] Количество попарно неизоморфных несвязных лесов с 5 вершинами равно

а) 5 ☐ б) 6 ☐ в) 7 ☒ г) 8 ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. [3] Вычислите интеграл $\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} x^2 \cos xy \, dx$.

Ответ: $\frac{1 - \cos \pi^2}{2}$

7. [3] Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ на множестве $\{(x, y) \mid |x - 1| + |y| \leq 1\}$.

Ответ: $0; -1$

8. [3] На множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$ заданы предикаты $S(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $x + y = z$, и $P(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $xy = z$. Через эти два предиката, не используя констант и функций, выразите предикат $R(x, y)$ на $\mathbb{N} \cup \{0\}$, истинный тогда и только тогда, когда $x \leq y \leq 2x$.

Ответ: $\exists t_1 S(x, t_1, y) \wedge \forall t_2 (S(x, x, t_2) \rightarrow \exists z S(y, z, t_2))$

9. [3] Квадрика задана уравнением

$$(y + 3z)^2 - 8z^2 + 4x^2 = 0.$$

Напишите каноническое уравнение квадрики и определить ее тип.

Ответ: конус второго порядка $4x'^2 + 4y'^2 - 2z'^2 = 0$.

10. [3] В ориентированном графе без кратных ребер и петель задана список вершин (u, v) -цепь p . Требуется построить (u, v) -цепь q , такую что:

- все ребра цепи q содержатся в p и идут в том же порядке, что и в p ;
- цепь q имеет наименьшее возможное число ребер при данных условиях.

Рассмотрим следующий алгоритм:

- 1 считывая вершины цепи p по порядку, построить оргграф, состоящий из всех вершин и ребер p ;
- 2 в построенном графе поиском в ширину найти кратчайшую (u, v) -цепь;
- 3 вернуть полученную цепь в качестве q .

Приведите пример, когда этот алгоритм сработает неправильно.

Ответ: $p : u \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow v$

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

11. [3] Командир дивизии, дислоцированной в населенных пунктах x_1, \dots, x_p , получил приказ вывести свои войска форсированным маршем в район населенных пунктов y_1, \dots, y_k . У него имеется карта, на которой указаны все населенные пункты данного района (включая $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_k$) и соединяющая их дорожная сеть. Для ускорения марша, требуется найти максимальное число параллельных (не использующих общих дорог и населенных пунктов) маршрутов из района дислокации в район назначения.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения.

Решение: решить задачу о максимальном потоке в дорожной сети с единичными пропускными способностями, добавив искусственный источник (с дугами в иксы) и сток (с дугами из игреков). Не забыть, что населенный пункт – это тоже дуга единичной пропускной способности (от “въезда” до “выезда”).



Институт математики и компьютерных наук



Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: математика, компьютерные науки; 2012 г.

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно выбрать все правильные ответы.

1. [2] Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ расходится, то последовательность $\{a_n\}$ может

а) быть бесконечно большой ☒ в) быть бесконечно малой ☒
б) быть стационарной ☒ г) иметь конечный предел ☒

2. [3] В линейном пространстве \mathbb{R}^4 заданы подпространства

$$U = \langle (1, -1, -1, 0)^T, (2, -1, 3, -1)^T, (-1, 2, 1, -1)^T, (2, 0, 3, -2)^T \rangle \text{ и}$$
$$V = \langle (1, 0, -2, -1)^T, (1, -1, 4, 0)^T, (1, -2, 4, 1)^T, (3, -3, 6, 0)^T \rangle.$$

Тогда

а) $U = V$ ☒ б) $U \neq V$ ☐ в) $V = U + V$ ☒ г) $U = U + V$ ☒

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения.

	верно	неверно
(3.1) [1] Если язык L распознается недетерминированным МП-автоматом, то он распознается детерминированной машиной Тьюринга с одной лентой	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
(3.2) [1] Множество всех слов в КС-языке, длина которых есть простое число, является КС-языком	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
(3.3) [1] Если минимальный ДКА, распознающий язык $L \subseteq \{a, b\}^*$, имеет k состояний, то $ L \geq 2^k$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

4. [2] Ядро линейного оператора \mathcal{A} пространства \mathbb{R}^5 совпадает с множеством решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Тогда размерность образа этого оператора равна

а) 5 ☐ б) 2 ☒ в) 3 ☐ г) 4 ☐

5. [3] Количество попарно неизоморфных обыкновенных связных двудольных графов с 5 вершинами равно

а) 3 ☐ б) 4 ☐ в) 5 ☒ г) 6 ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. [3] Вычислите интеграл $\int_0^1 dy \int_y^1 x^2 \operatorname{ch} xy \, dx$.

Ответ: $\frac{\operatorname{ch} 1 - 1}{2}$

7. [3] Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy$ на множестве $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Ответ: $8; -1$

8. [3] На множестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$ заданы предикаты $S(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $x + y = z$, и $P(x, y, z)$, истинный тогда и только тогда, когда $xy = z$. Через эти два предиката, не используя констант и функций, выразите предикат $R(x)$ на $\mathbb{N} \cup \{0\}$, истинный тогда и только тогда, когда x – квадрат простого числа.

Ответ: $\exists t \left(P(t, t, x) \wedge \neg P(t, t, t) \wedge \forall y \forall z (P(y, z, t) \rightarrow (P(y, z, z) \vee P(y, z, y))) \right)$

9. [3] Квадрика задана уравнением

$$2(x - 3z)^2 + 3y^2 - 16z^2 + 1 = 0.$$

Напишите каноническое уравнение квадрики и определить ее тип.

Ответ: $\text{двуполостный гиперболоид } 8x'^2 + 3y'^2 - 4z'^2 = -1$

10. [3] Двудольный граф $G = (X, Y, E)$ задан списками смежности, по одному списку для каждой вершины $x \in X$. В каждом списке вершины упорядочены по возрастанию номеров. Рассмотрим следующий алгоритм построения наибольшего паросочетания:

- 1 положить паросочетание M равным пустому; все вершины объявить непросмотренными;
- 2 пока не все вершины из X просмотрены, повторять
 - выбрать непросмотренную вершину x и объявить ее просмотренной;
 - если в списке смежности вершины x есть непросмотренные вершины
 - выбрать первую такую вершину y ; объявить y просмотренной; добавить в M ребро xy ;
- 3 вернуть M в качестве ответа.

Приведите пример, когда этот алгоритм даст неверный ответ.

Ответ:
$$\begin{array}{c|c} x_1 & y_1, y_2 \\ \hline x_2 & y_1 \end{array}$$

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

11. [3] На плоскости своими координатами (x, y) задан набор различных точек. Маленький мальчик играет в игру: он берет две точки и соединяет их отрезком прямой линии с концами в этих точках. Но вот беда: чернила в ручке вот-вот закончатся, а других ручек поблизости нет. Мальчик непременно хочет, чтобы по его линиям можно было бы добраться из любой точки в любую другую. Естественно, в сложившихся условиях мальчик экономит чернила. Помогите мальчику, используя минимальное количество чернил, составить искомую конфигурацию отрезков.

Предложите модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения.

Решение: построить матрицу расстояний между точками и решать задачу о минимальном остове.