Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2009 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Для линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ собственным является вектор

а) $(1,2,1)^{\text{т}}$ ☑ б) $(2,1,0)^{\text{т}}$ ☐ в) $(1,2,0)^{\text{т}}$ ☑ г) $(2,1,1)^{\text{т}}$ ☐

2. **[3]** Если слово W выводимо в грамматике $G = \{S \to abSb|aA,\ A \to bA|a\}$, то

а) W содержит не менее двух букв a ☑
б) W содержит не менее одной буквы b ☐
в) $W \neq (ab)^3ab^3ab^2$ ☐

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

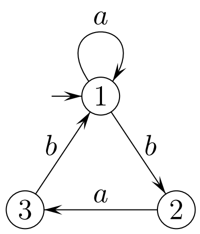
3. **[2]** Число точек разрыва функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}(x+1)$ равно

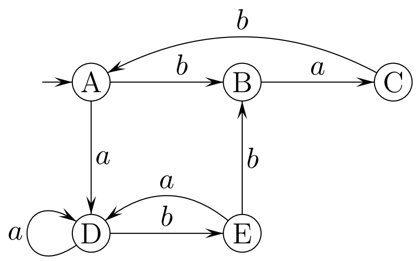
а) 0 ☐ б) 1 ☑ в) 2 ☐ г) 3 ☐

4. **[2]** Размерность ортогонального дополнения к подпространству, порожденному векторами $(1,2,3,1)$, $(1,-2,3,1)$, $(1,1,-1,-1)$, $(1,-3,1,-1)$, равна

а) 0 ☑ б) 1 ☐ в) 2 ☐ г) 3 ☐

5. **[3]** В изображенных автоматах все состояния являются терминальными. Чтобы автомат слева распознавал тот же язык, что и автомат справа, в него нужно добавить дугу





а) $1 \xrightarrow{a} 3$ ☑ б) $1 \xrightarrow{a} 2$ ☐ в) $3 \xrightarrow{a} 2$ ☐ г) варианты а-в не подходят ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк полученный ответ.

6. **[3]** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ на множестве $\{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$.

Ответ: $\boxed{8;\,-1}$

7. **[3]** Область D задана неравенствами $1 \le \frac{x^2}{4} + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le \frac{x}{2}$. Вычислите

$$\iint\limits_D \frac{8y}{x^3}\,dxdy$$

Ответ: $\boxed{\ln 2}$

8. **[3]** Вершинами призмы являются точки с координатами $(1,2,0)$, $(2,3,1)$, $(1,5,-1)$, $(2,1,-3)$, $(2,4,-4)$ и $(2,6,0)$ в некотором ортонормированном репере. Найдите объем призмы.

Ответ: $\boxed{7}$

9. **[3]** Напишите кратчайшую ДНФ, равносильную формуле $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (Y \vee (X \leftrightarrow Z))$.

Ответ: $\boxed{(X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge \neg Z)}$

10. **[3]** Имеется неограниченный набор монет достоинством в x_1, x_2, ..., x_k центов, которым можно выдать любую сумму в центах. Требуется набрать сумму в N центов, используя наименьшее количество монет. Рассмотрим жадный алгоритм:

1. Упорядочить по убыванию достоинства монет;
2. До тех пор, пока сумма N не набрана

    добавить максимальное возможное количество монет наибольшего достоинства из еще не использованных.

Приведите набор достоинств монет, для которого жадный алгоритм не дает оптимального решения.

Ответ: $\boxed{\text{например, 1,5,6 при } N = 20}$

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.________________________________

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

11. **[3]** Тяжёлые времена наступили для марсианского сената. Коррупция разъедает всё, даже гордость марсианской демократии не стала исключением. Рассмотрим процедуру принятия типичного решения. Сенатор, которому понадобился какой-то закон, вносит его на рассмотрение в сенат. Чтобы повысить свои шансы, он обзванивает всех сенаторов, на которых в его сейфе имеется компромат. Каждому он вежливо предлагает одобрить новый закон. Более того, чтобы не оставлять это важное дело на волю случая, он просит каждого из них проделать ту же процедуру со своим сейфом. И каждый (а что же делать?) обзванивает всех тех, на кого он сам имеет компромат, с аналогичной просьбой. Теперь, если закон поддержали абсолютно все сенаторы, президенту ничего не остаётся, кроме как подписать его. Иначе он может отправить закон на доработку обратно в сенат.

Только что избранный президент начинает кампанию по борьбе с коррупцией. В первую очередь, в тюрьму должны попасть наиболее опасные сенаторы – такие, которые могут в одиночку провести какой-нибудь антигосударственный закон. Секретная служба уже проверила сейф каждого из сенаторов и выяснила, какой в нём хранится компромат.

Предложите модель этой задачи как задачи на графе и алгоритм, который определяет всех наиболее опасных сенаторов.

Решение: в орграфе компроматной зависимости выделить компоненты сильной связности, построить орграф компонент и проверить единственность источника в нем.

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2009 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Для линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ собственным является вектор

а) $(3,3,1)^{\mathsf{T}}$ ☐ б) $(1,1,1)^{\mathsf{T}}$ ☐ в) $(3,1,1)^{\mathsf{T}}$ ☑ г) $(5,0,1)^{\mathsf{T}}$ ☑

2. **[3]** Если слово W выводимо в грамматике $G = \{S \to cSdc|Ad,\ A \to Ac|d\}$, то

а) W содержит не менее одной буквы c ☐
б) W содержит не менее двух букв d ☑
в) $W \neq (c^3d)^2(dc)^3$ ☐

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

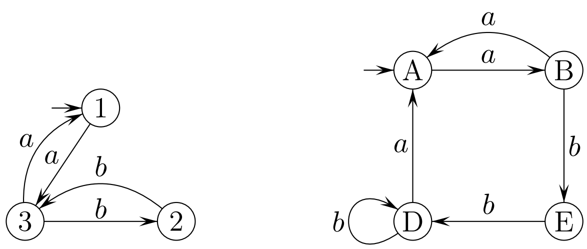
3. **[2]** Число точек разрыва функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+1+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}} + \operatorname{sgn}(x+1)$ равно

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) 2 ☑ г) 3 ☐

4. **[2]** Размерность ортогонального дополнения к подпространству, порожденному векторами $(1,2,3,4)$, $(2,3,4,5)$, $(3,4,5,6)$, $(7,6,5,4)$, равна

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) 2 ☑ г) 3 ☐

5. **[3]** В изображенных автоматах все состояния являются терминальными. Чтобы автомат слева распознавал тот же язык, что и автомат справа, в него нужно добавить дугу



а) $2 \xrightarrow{b} 2$ ☑ б) $2 \xrightarrow{b} 1$ ☐ в) $3 \xrightarrow{b} 3$ ☐ г) варианты а-в не подходят ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк полученный ответ.

6. **[3]** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ на множестве $\{(x,y) \mid |x-1| + |y| \le 1\}$.

Ответ: $\boxed{0; -1}$

7. **[3]** Область D задана неравенствами $1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge \frac{3}{2}x$. Вычислите

$$\iint\limits_D \frac{x}{y}\, dxdy$$

Ответ: $\boxed{3\ln 2}$

8. **[3]** Вершинами пирамиды являются точки с координатами $(2,1,0)$, $(3,2,-1)$, $(5,0,0)$, $(1,6,-1)$ и $(6,1,-1)$ в некотором ортонормированном репере. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\boxed{10/3}$

9. **[3]** Напишите кратчайшую ДНФ, равносильную формуле $(Y \leftrightarrow \neg Z) \leftrightarrow (\neg Y \wedge (X \leftrightarrow Z))$.

Ответ: $\boxed{(X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge Z)}$

10. **[3]** Даны n заявок на проведение занятий. В каждой заявке указаны время начала s_k и конца f_k k-го занятия. Заявки с номерами k и n считаются совместимыми, если полуинтервалы $[s_k, f_k)$ и $[s_n, f_n)$ не пересекаются. Совместимые занятия можно проводить в одной и той же аудитории. Рассмотрим следующий алгоритм:

На каждом шаге выбрать занятие с минимальной продолжительностью, совместимое с уже выбранными занятиями.

Приведите пример, когда этот алгоритм не обеспечивает выбор наибольшего числа совместимых занятий.

Ответ: $\boxed{\text{например, } [2:00, 3:00),\ [3:00, 4:00),\ [2:45, 3:15)}$

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

11. **[3]** Авиакомпания Пингвин-Авиа, как и другие антарктические авиакомпании, испытывает финансовые трудности в период мирового кризиса. Жители Антарктиды экономят на полётах и чаще пользуются поездами или вообще предпочитают сидеть дома. Руководство компании надеется, что летом поток клиентов возрастёт за счёт желающих отдохнуть на приморских курортах Антарктиды. Чтобы дотянуть до лета, было решено оптимизировать схему авиарейсов, временно сократив часть рейсов и, возможно, введя несколько новых.

Директор Пингвин-Авиа считает, что после оптимизации схема полётов должна обладать следующими свойствами: (1) каждый рейс Пингвин-Авиа соединяет ровно два аэропорта, (2) рейсами Пингвин-Авиа можно добраться из любого аэропорта Антарктиды до любого другого, возможно, с пересадками, (3) схема должна содержать минимальное число рейсов среди всех схем, отвечающих первому свойству.

Но в Антарктиде не всё так просто. За отмену существующего рейса с авиакомпании взимается разовая неустойка в размере d антарктических долларов. Кроме того, чтобы получить слоты под новый рейс, надо дать взятку крёстному отцу антарктической мафии по прозвищу Белый медведь в размере b антарктических долларов.

Предложите модель этой задачи как задачи на графе и алгоритм, который трансформирует существующее расписание с наименьшими затратами.

Решение: если и в текущем расписании каждый рейс соединяет два аэропорта, то строим граф текущего расписания, разбиваем на компоненты связности, в каждой выбираем произвольный остов и произвольно эти остовы соединяем в одно дерево. Если изначально рейс может соединять более двух аэропортов, все много хуже.

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2009 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Для линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$ собственным является вектор

а) $(3,1,0)^{\text{т}}$ ☐ б) $(3,3,-4)^{\text{т}}$ ☑ в) $(2,1,-1)^{\text{т}}$ ☑ г) $(1,1,1)^{\text{т}}$ ☐

2. **[3]** Если слово W выводимо в грамматике $G = \{S \to aSab|aA,\ A \to Aa|b\}$, то

а) W содержит не менее двух букв a ☐
б) W содержит не менее одной буквы b ☑
в) $W \neq a^3ba(ab)^3$ ☑

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

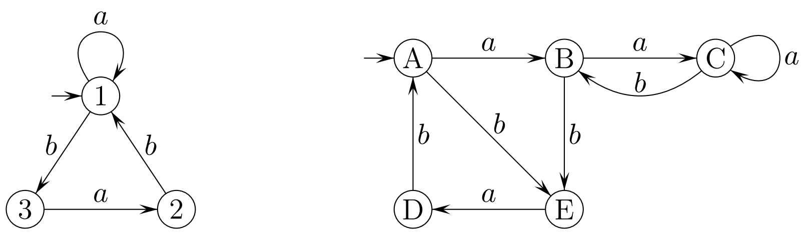
3. **[2]** Число точек разрыва функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+x^{2n}} + \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(x-1)+1)$ равно

а) 0 ☐ б) 1 ☑ в) 2 ☐ г) 3 ☐

4. **[2]** Размерность ортогонального дополнения к подпространству, порожденному векторами $(-1,2,-3,1)$, $(5,-7,9,-11)$, $(-7,6,-5,4)$, $(1,-1,1,-1)$, равна

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) 2 ☑ г) 3 ☐

5. **[3]** В изображенных автоматах все состояния являются терминальными. Чтобы автомат слева распознавал тот же язык, что и автомат справа, в него нужно добавить дугу



а) $1 \xrightarrow{a} 2$ ☐ б) $1 \xrightarrow{a} 3$ ☑ в) $2 \xrightarrow{a} 3$ ☐ г) варианты а-в не подходят ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк полученный ответ.

6. **[3]** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2 + 2xy$ на множестве $\{(x,y) \mid |x| + |y| \le 2\}$.

Ответ: $\boxed{7; -9}$

7. **[3]** Область D задана неравенствами $1 \le \frac{x^2}{16} + y^2 \le 3$, $x \ge 0$, $y \ge \frac{x}{4}$. Вычислите

$$\iint\limits_D \frac{x}{y^5}\, dxdy$$

Ответ: $\boxed{4}$

8. **[3]** Вершинами пирамиды являются точки с координатами $(0,1,2)$, $(1,2,3)$, $(0,4,1)$, $(1,0,-1)$ и $(2,1,0)$ в некотором ортонормированном репере. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\boxed{14/3}$

9. **[3]** Напишите кратчайшую ДНФ, равносильную формуле $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (\neg X \wedge (\neg Y \vee \neg Z))$.

Ответ: $\boxed{\neg Y \vee (\neg X \wedge Z)}$

10. **[3]** В ориентированном графе без кратных ребер и петель задана списком вершин цепь p. Требуется построить ее подцепь q, такую что (1) начальные и конечные вершины цепей p и q совпадают, (2) ребра в цепи q идут в том же порядке, что и в цепи p, (3) цепь q имеет наименьшее возможное число ребер при данных условиях.

Рассмотрим следующий алгоритм:

Считываем вершины цепи p и как только встречается цикл (вершина встретилась второй раз), его удаляем. Оставшаяся после просмотра конечной вершины цепь является искомой.

Приведите пример, когда этот алгоритм сработает неправильно.

Ответ: $\boxed{\text{например, } 1-2-3-2-4-3-5}$

Группа **КН-40**_   Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

11. **[3]** Система родственных отношений у марсиан достаточно запутана. Собственно говоря, марсиане почкуются когда им угодно и как им угодно, собираясь для этого разными группами, так что у марсианина может быть и один родитель, и несколько десятков, а сотней детей сложно кого-нибудь удивить. Марсиане привыкли к этому, и такой жизненный уклад кажется им естественным.

А вот в Планетарном Совете запутанная генеалогическая система создает серьёзные неудобства. Там заседают достойнейшие из марсиан, и поэтому, чтобы никого не обидеть, во всех обсуждениях слово принято предоставлять по очереди, так, чтобы сначала высказывались представители старших поколений, потом те, что помладше, и лишь затем уже самые юные марсиане. Однако соблюдение такого порядка на деле представляет собой совсем не простую задачу. Не всегда марсианин знает всех своих родителей, что уж тут говорить про бабушек и дедушек! Но когда по ошибке сначала высказывается праправнук, а потом только молодо выглядящий прапрадед – это настоящий скандал. К счастью, в секретариате Планетарного Совета имеется список детей каждого марсианина-депутата.

Предложите модель этой задачи как задачи на графе и алгоритм, который определил бы такой порядок выступлений в Планетарном Совете, который гарантировал бы, что каждый член совета получает возможность высказаться раньше любого из своих потомков.

Решение: выполнить топологическую сортировку генеалогического дага.

Государственный экзамен по математике
Математико-механический факультет УрГУ, 2009 г.

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1 и 2 нужно среди предлагаемых утверждений выбрать все верные.

1. **[2]** Для линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ собственным является вектор

а) $(1,4,3)^{\text{т}}$ ☑ б) $(2,1,0)^{\text{т}}$ ☐ в) $(1,2,3)^{\text{т}}$ ☐ г) $(3,0,1)^{\text{т}}$ ☑

2. **[3]** Если слово W выводимо в грамматике $G = \{S \to cdSc|cA,\ A \to cA|d\}$, то

а) W содержит не менее двух букв c ☐
б) W содержит не менее одной буквы d ☑
в) $W \neq (cd)^4c^4$ ☑

В заданиях 3–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

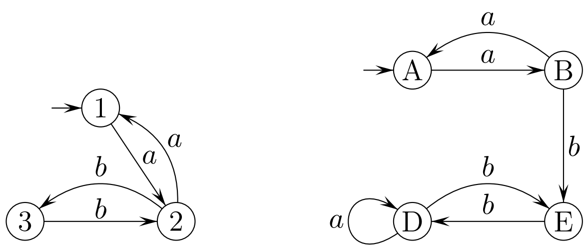
3. **[2]** Число точек разрыва функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^{nx})}{\ln(1+e^{2n})}$ равно

а) 0 ☐ б) 1 ☑ в) 2 ☐ г) 3 ☐

4. **[2]** Размерность ортогонального дополнения к подпространству, порожденному векторами $(2,1,4,3)$, $(-3,2,-5,4)$, $(4,-3,6,-5)$, $(-5,3,-9,7)$, равна

а) 0 ☐ б) 1 ☑ в) 2 ☐ г) 3 ☐

5. **[3]** В изображенных автоматах все состояния являются терминальными. Чтобы автомат слева распознавал тот же язык, что и автомат справа, в него нужно добавить дугу



а) $2 \xrightarrow{b} 1$ ☐ б) $3 \xrightarrow{b} 1$ ☑ в) $3 \xrightarrow{b} 3$ ☐ г) варианты а-в не подходят ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк полученный ответ.

6. **[3]** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x, y) = -x^2 + (y-1)^2 + 2xy$ на множестве $\{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$.

Ответ: $\boxed{1; -3}$

7. **[3]** Область D задана неравенствами $1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le 2$, $0 \le y \le \frac{4}{3}x$. Вычислите

$$\iint\limits_D \frac{27y}{x^5}\, dxdy$$

Ответ: $\boxed{1/2}$

8. **[3]** Вершинами призмы являются точки с координатами $(2, 0, 1)$, $(3, 1, 0)$, $(5, -1, 1)$, $(2, 6, -1)$, $(1, 5, 0)$ и $(4, 4, 0)$ в некотором ортонормированном репере. Найдите объем призмы.

Ответ: $\boxed{5}$

9. **[3]** Напишите кратчайшую ДНФ, равносильную формуле $(X \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (X \wedge (Y \vee Z))$.

Ответ: $\boxed{(X \wedge \neg Y) \vee Z}$

10. **[3]** В ориентированном графе без кратных ребер и петель задана списком вершин (u, v)-цепь p. Требуется построить ее подцепь q, такую что (1) начальные и конечные вершины цепей p и q совпадают, (2) ребра в цепи q идут в том же порядке, что и в цепи p, (3) цепь q имеет наименьшее возможное число ребер при данных условиях.

Рассмотрим следующий алгоритм:

1. Построим ориентированный граф из всех вершин и ребер цепи p;
2. В построенном графе поиском в ширину найдем кратчайшую (u, v)-цепь.

Приведите пример, когда этот алгоритм сработает неправильно.

Ответ: $\boxed{\text{например, } 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 2 - 4 - 6 - 5 - 7}$

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

11. **[3]** В стране N городов, некоторые из которых соединены между собой дорогами. Для того, чтобы проехать по одной дороге, требуется один бак бензина и одна взятка сотруднику ГИБДД. Бензин в разных городах имеет разную стоимость, а вот сотрудники ГИБДД везде одинаковы. Требуется добраться из города А в город Б, потратив как можно меньшее количество денег.

Предложите модель этой задачи как задачи на графе и алгоритм, который определил бы самый экономный маршрут.

Решение: построить взвешенный орграф, где вес дуги (дороги) равен стоимости бака в начале дуги плюс взятка. Решить задачу о минимальном пути.