Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

"Утверждаю"
Председатель ГАК

Государственный экзамен на степень бакалавра

по направлению: фундаментальная информатика и информационные технологии; 2019 г.

Группа **ФИИТ-401** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если при любом ненулевом наборе значений переменных значение формы отрицательно. При каких значениях параметра t квадратичная форма

$$-2x_1^2 - x_2^2 - tx_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$$

отрицательно определена?

а) $t = 1$ ☐ б) $t = 0$ ☐ в) $t = 12$ ☐ г) $t = -1$ ☐ д) $t = 10$ ☐

2. **[3]** При каких значениях параметра a прямые

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_2\colon \begin{cases} x = a + 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2 - t \end{cases}$$

пересекаются?

Ответ: ☐

3. **[3]** Укажите множество всех значений параметра p, при которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \ln^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^p.$$

а) $p < \frac{1}{2}$ ☐ б) $p > \frac{1}{3}$ ☐ в) $p < \frac{1}{4}$ ☐ г) $p \geqslant \frac{1}{5}$ ☐

4. **[3]** Решите дифференциальное уравнение $5 \cdot f'_x = 7 \cdot y^2 \cdot f'_y$, выполнив замену: $x = u + 5 \cdot v,\ y = \frac{1}{7 \cdot v}$.

Ответ: ☐

5. **[3]** Пусть T_0, T_1, S, M, L — основные замкнутые классы. Найти полином Жегалкина булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) \in (S \cap M)$ без фиктивных переменных.

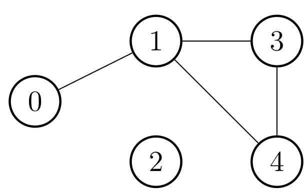
Ответ: ☐

6. **[3]** Используя метод резолюций, доказать невыполнимость множества формул

$$\{(\forall x)(A(x) \to B(x)), \quad (\forall x)(C(x) \to D(x)), \quad (\forall x)(B(x) \to \neg D(x)), \quad \neg(\forall x)(A(x) \to \neg C(x))\}\,.$$

Ответ:

7. **[3]** Граф на n вершинах задан матрицей смежности либо списком смежности. Напишите оценку временной сложности каждой из указанных операций в терминах Θ для обоих способов задания графа в зависимости от n. Во всех операциях вершины задаются своими номерами.



Пример графа

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

Соответствующая матрица смежности, `int[,]`

0	$\to 1 \to \varnothing$
1	$\to 3 \to 4 \to 0 \to \varnothing$
2	$\to \varnothing$
3	$\to 1 \to 4 \to \varnothing$
4	$\to 1 \to 3 \to \varnothing$

Соответствующий список смежности, `LinkedList<int>[]`

Операция	Граф задан матрицей смежности	Граф задан списком смежности
Напечатать список смежных вершин заданной вершины степени $\sqrt{n}$		
Удалить ребро между парой вершин		
Найти вершину со степенью один (одно инцидентное ребро)		

8. **[3]** Опишите типы `A`, `B`, `C`, `D` так, чтобы приведенный фрагмент кода на языке C# компилировался и работал без ошибок, но, если убрать один любой оператор явного преобразования типа, происходила ошибка компиляции или времени выполнения. Среди типов `A`, `B`, `C`, `D` должен быть хотя бы один интерфейс. Если возможно несколько решений, запишите любое.

Фрагмент кода:

```
B c1 = new C();
C c2 = (C)c1;
D d1 = c2;
A a1 = c2;
A a2 = d1;
```

Образец оформления ответа:

```
interface A {}
class B: A {}
interface C: A {}
class D: B, C {}
```

Ответ:

Группа **ФИИТ-401** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

9. **[3]** Дана марковская цепь $X(n)$ со следующими переходными вероятностями:

$P(1,1) = 0.5$ $P(1,2) = 0.5$ $P(1,3) = 0$
$P(2,1) = 0.5$ $P(2,2) = 0$ $P(2,3) = 0.5$
$P(3,1) = 0$ $P(3,2) = 0.1$ $P(3,3) = 0.9$

В нулевой момент все состояния считаются равновероятными. Найдите вероятности того, что:

а) $X(0) = 1$,
б) $X(0) = 1$, $X(1) = 2$, $X(2) = 3$,
в) $X(11) = 3$, если $X(9) = 1$, $X(10) = 2$,
г) $X(2) = 3$,
д) $X(8) = 3$,
е) найдите при n, стремящемся к бесконечности, предел вероятности того, что $X(n) = 2$,
ж) найдите матожидание момента первого попадания в состояние 3.

Ответ:

10. **[3]** *Независимое множество вершин* графа G — это такое подмножество его вершин, что любые две вершины в нем не смежны. Рассмотрим следующий эвристический алгоритм построения *максимального независимого множества* M графа $G = (V, E)$:

1. Пока граф G не станет пустым, делать
2. Найти вершину $v \in V$ минимальной степени (если таких вершин несколько — выбрать любую из них).
3. Добавить эту вершину в M.
4. Удалить из графа вершину v и все вершины, смежные с ней.

Приведите пример графа, в котором данный алгоритм неверно построит максимальное независимое множество.

Ответ:

11. **[3]** Цех, располагающий M одинаковыми станками, получил заказ на изготовление партии из N изделий в срок K дней. Можно считать, что начало работ по выполнению заказа начинается в день с номером 1. Для каждого изделия с номером i заданы:

S_i — день, в который можно начать его изготовление, так как поступят все комплектующие;

D_i — количество дней на изготовление;

T_i — последний день, когда изделие должно быть готово;

при этом все числа целые и $S_i + D_i \leqslant T_i$.

Каждое изделие можно изготавливать на любом станке, можно прерывать его изготовление на некоторый период времени, затем продолжить изготовление на другом станке. Единовременно один станок может обрабатывать лишь одно изделие и одно изделие изготавливается лишь на одном станке.

Требуется разработать план выполнения заказа в срок, не превышающий заданный, либо выяснить что это невозможно.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность $O(n^5)$.

Решение:

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

“Утверждаю”
Председатель ГАК

Государственный экзамен на степень бакалавра

по направлению: фундаментальная информатика и информационные технологии; 2019 г.

Группа **ФИИТ-401** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если при любом ненулевом наборе значений переменных значение формы отрицательно. При каких из указаных ниже значений параметра t квадратичная форма

$$-x_1^2 - 2x_2^2 + tx_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 - 2x_2x_3$$

отрицательно определена?

а) $t = 0$ ☐ б) $t = -1$ ☐ в) $t = -2$ ☐ г) $t = 3$ ☐ д) $t = -3$ ☐

2. **[3]** При каких значениях параметра a прямые

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -2 - t, \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_2\colon \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = t, \\ z = a + t \end{cases}$$

пересекаются?

Ответ: ☐

3. **[3]** Укажите множество всех значений параметра p, при которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \sin^2 \frac{1}{n} \right)^p .$$

а) $p \leqslant \frac{1}{2}$ ☐ б) $p \geqslant \frac{1}{3}$ ☐ в) $p > \frac{1}{4}$ ☐ г) $p \geqslant \frac{1}{5}$ ☐

4. **[3]** Решите дифференциальное уравнение $4 \cdot f'_x = \frac{y^2}{7} \cdot f'_y$, выполнив замену: $x = u + 4 \cdot v,\ y = \frac{7}{v}$.

Ответ: ☐

5. **[3]** Пусть T_0, T_1, S, M, L — основные замкнутые классы. Найти полином Жегалкина булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) \in S \backslash (T_0 \cup L)$ без фиктивных переменных с нулевыми коэффициентами в слагаемых первой степени.

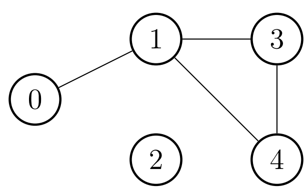
Ответ: ☐

6. **[3]** Используя метод резолюций доказать невыполнимость множества формул

$$\{(\forall x)(A(x) \to (B(x)\&C(x))), \quad (\forall x)(B(x) \to \neg D(x)), \quad \neg(\forall x)(A(x) \to \neg D(x))\}\,.$$

Ответ:

7. **[3]** Граф на n вершинах задан матрицей смежности либо списком смежности. Напишите оценку временной сложности каждой из указанных операций в терминах Θ для обоих способов задания графа в зависимости от n. Во всех операциях вершины задаются своими номерами.



Пример графа

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0

Соответствующая матрица смежности, `int[,]`

0	$\to 1 \to \varnothing$
1	$\to 3 \to 4 \to 0 \to \varnothing$
2	$\to \varnothing$
3	$\to 1 \to 4 \to \varnothing$
4	$\to 1 \to 3 \to \varnothing$

Соответствующий список смежности, `LinkedList<int>[]`

Операция	Граф задан матрицей смежности	Граф задан списком смежности
Напечатать список смежных вершин заданной вершины степени $\sqrt{n}$		
Проверить существование ребра между парой вершин		
Найти изолированную вершину (без инцидентных ребер)		

8. **[3]** Опишите типы `A`, `B`, `C`, `D` так, чтобы приведенный фрагмент кода на языке C# компилировался и работал без ошибок, но, если убрать один любой оператор явного преобразования типа, происходила ошибка компиляции или времени выполнения. Среди типов `A`, `B`, `C`, `D` должен быть хотя бы один интерфейс. Если возможно несколько решений, запишите любое.

Фрагмент кода:

```
A a1 = new A();
A a2 = new B();
A a3 = new D();
B b1 = (B)a3;
C c1 = (C)a2;
```

Образец оформления ответа:

```
interface A {}
class B: A {}
interface C: A {}
class D: B, C {}
```

Ответ:

Группа **ФИИТ-401** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

9. **[3]** Дана марковская цепь $X(n)$ со следующими переходными вероятностями:

$P(1,1) = \frac{1}{3}$ $P(1,2) = \frac{1}{3}$ $P(1,3) = \frac{1}{3}$

$P(2,1) = \frac{1}{3}$ $P(2,2) = \frac{1}{3}$ $P(2,3) = \frac{1}{3}$

$P(3,1) = \frac{1}{3}$ $P(3,2) = \frac{1}{3}$ $P(3,3) = \frac{1}{3}$

В нулевой момент все состояния считаются равновероятными. Найдите вероятности того, что:

а) $X(0) = 1$,

б) $X(0) = 1$, $X(1) = 2$, $X(2) = 3$,

в) $X(11) = 3$, если $X(7) = 1$, $X(8) = 2$, $X(9) = 1$, $X(10) = 2$,

г) $X(2) = 3$,

д) $X(8) = 3$,

е) вероятность того, что $X(0) = 1$, если $X(5) = 1$,

ж) найдите матожидание и дисперсию момента первого попадания в состояние 3.

Ответ:

10. **[3]** Рассмотрим следующий алгоритм построения полного паросочетания наименьшего веса в полном двудольном графе $G = (X, Y, E)$, $|X| = |Y| = n$.

1. Проходим вершины доли X в порядке возрастания их номеров.
2. Если все вершины насыщены, то СТОП (оптимальное паросочетание построено).
3. Иначе очередной ненасыщенной вершине $x \in X$ сопоставляем ненасыщенную вершину $y \in Y$ такую, чтобы ребро xy имело наименьший вес среди всех ребер xu, таких, что $u \in Y$ — ненасыщенная вершина, и добавляем ребро xy в паросочетание.
4. Возвращаемся в п. 2.

Приведите пример, в котором этот алгоритм найдет неоптимальное полное паросочетание.

Ответ:

11. **[3]** Это был черный день в истории мувинговой компании «Джентльмены удачи». Им и раньше приходилось доставлять тяжелые предметы в удаленные точки города. Но чтобы так! Сразу заказ на перевозку N роялей! Из разных точек в разные точки города! И, главное, в заказе встречается 25 этаж! И грузового лифта нет!

Хорошо хоть заказчик не настаивает на том, чтобы конкретный рояль оказался в конкретной из N точек доставки. Но для каждого рояля он указал, в одной из каких из этих точек он должен в итоге оказаться. И вроде даже схема рабочая! Можно и так доставить рояли, и этак!

Но чует сердце менеджера по организации перевозок, что придется отстегнуть грузчикам приличную сумму! Прикинул по тарифу для каждой допустимой пары (i–ый рояль — j–ая точка доставки), что плата грузчикам составит c_{ij} рублей.

Помогите менеджеру придумать оптимальный план перевозок, а именно тот, который позволит заплатить грузчикам минимальную сумму.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность $O(N^4)$.

Решение:

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

"Утверждаю"
Председатель ГАК

Государственный экзамен на степень бакалавра

по направлению: фундаментальная информатика и информационные технологии; 2019 г.

Группа **ФИИТ-401** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если при любом ненулевом наборе значений переменных значение формы отрицательно. При каких значениях параметра t квадратичная форма

$$-x_1^2 - 3x_2^2 - tx_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

отрицательно определена?

а) $t = -1$ ☐ б) $t = 5$ ☐ в) $t = 8$ ☐ г) $t = 3$ ☐ д) $t = 0$ ☐

2. **[3]** При каких значениях параметра a прямые

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = 5 + \ \ t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = \qquad t \end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_2\colon \begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 4 - t, \\ z = a - t \end{cases}$$

пересекаются?

Ответ:

3. **[3]** Укажите множество всех значений параметра p, при которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \cos\frac{1}{n} - 1 \right)^p.$$

а) $p > \frac{1}{2}$ ☐ б) $p < \frac{1}{3}$ ☐ в) $p > \frac{1}{4}$ ☐ г) $p \geqslant \frac{1}{5}$ ☐

4. **[3]** Решите дифференциальное уравнение $f'_x = \frac{y^2}{5} \cdot f'_y$, выполнив замену: $x = u + v,\ y = \frac{5}{v}$.

Ответ:

5. **[3]** Пусть T_0, T_1, S, M, L — основные замкнутые классы. Найти полином Жегалкина булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) \in (S \cap T_0) \backslash (M \cup L)$ без фиктивных переменных с нулевым коэффициентом при x_2.

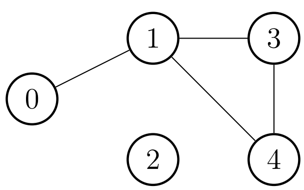
Ответ:

6. **[3]** Используя метод резолюций доказать невыполнимость множества формул

$$\{\neg(\exists x)(A(x)\&B(x)), \quad \neg(\exists x)(C(x)\&D(x)), \quad (\forall x)(\neg B(x) \to D(x)), \quad (\exists x)(A(x)\&C(x))\}.$$

Ответ:

7.**[3]** Граф на n вершинах задан матрицей смежности либо списком смежности. Напишите оценку временной сложности каждой из указанных операций в терминах Θ для обоих способов задания графа в зависимости от n. Во всех операциях вершины задаются своими номерами.



Пример графа

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Соответствующая матрица смежности, `int[,]`

$$\begin{array}{|c|l} \hline 0 & \to 1 \to \varnothing \\ \hline 1 & \to 3 \to 4 \to 0 \to \varnothing \\ \hline 2 & \to \varnothing \\ \hline 3 & \to 1 \to 4 \to \varnothing \\ \hline 4 & \to 1 \to 3 \to \varnothing \\ \hline \end{array}$$

Соответствующий список смежности, `LinkedList<int>[]`

Операция	Граф задан матрицей смежности	Граф задан списком смежности
Добавить ранее не существовавшее ребро между двумя вершинами		
Удалить ребро между парой вершин		
Найти изолированную вершину (без инцидентных ребер)		

8. **[3]** Опишите типы `A`, `B`, `C`, `D` так, чтобы приведенный фрагмент кода на языке C# компилировался и работал без ошибок, но, если убрать один любой оператор явного преобразования типа, происходила ошибка компиляции или времени выполнения. Среди типов `A`, `B`, `C`, `D` должен быть хотя бы один интерфейс. Если возможно несколько решений, запишите любое.

Фрагмент кода:

```
B b1 = new B();
B b2 = new C();
A a1 = b2;
D d1 = (D)a1;
A a2 = b1;
```

Образец оформления ответа:

```
interface A {}
class B: A {}
interface C: A {}
class D: B, C {}
```

Ответ:

Группа **ФИИТ-401**   Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

9. **[3]** Дана марковская цепь $X(n)$ со следующими переходными вероятностями:

$$P(1,1) = \frac{1}{3} \quad P(1,2) = \frac{1}{3} \quad P(1,3) = \frac{1}{3}$$
$$P(2,1) = 0 \quad P(2,2) = 0 \quad P(2,3) = 1$$
$$P(3,1) = 0 \quad P(3,2) = 1 \quad P(3,3) = 0$$

В нулевой момент все состояния считаются равновероятными. Найдите вероятности того, что:

а) $X(0) = 1$
б) $X(0) = 1$, $X(1) = 2$, $X(2) = 3$,
в) $X(11) = 3$, если $X(9) = 1$, $X(10) = 2$,
г) $X(2) = 3$,
д) $X(8) = 3$
е) найдите при n, стремящемся к бесконечности, предел вероятности того, что $X(n) = 1$,
ж) найдите матожидание и дисперсию момента первого попадания в состояние 3.

Ответ:

10. **[3]** Рассмотрим следующий эвристический алгоритм решения задачи коммивояжера в полном взвешенном графе.

1. Пока граф не пуст, делать
2. Выбрать произвольную вершину v.
3. Выбирать ребро vw минимального веса, такое, что w не была еще посещена. Добавить это ребро в маршрут.
4. Удалить вершину v из графа вместе со всеми инцидентными ей ребрами.
5. Продолжить обход из вершины w.

Приведите пример, когда этот алгоритм найдет неоптимальный маршрут коммивояжера.

Ответ:

11. **[3]** *Я пригласил вас, господа, с тем чтобы сообщить вам пренеприятное известие: к нам едет ревизор.*

Ах, Николай Васильевич! Ревизор! Один! Вот Н–скому университету бы проблемы этого города! Туда слетаются ревизоры (вернее, эксперты) со всей страны! И городничий (вернее, ректор) и его подчиненные в ужасе шепчут друг другу страшное слово "А–К–К–Р–Е–Д–И–Т–А–Ц–И–Я"!

Протокольный отдел занимается планированием перелетов экспертов из мест их постоянного расположения в Н–ск. И лететь им с пересадками многими, поскольку специалисты протокольного отдела хотят выиграть еще немного времени и стараются найти максимально долгий перелет для каждого эксперта. А вообще-то эксперты любят летать, и все будет хорошо, если только в процессе перелета эксперт не окажется в одном и том же аэропорту второй раз. Тогда он заподозрит что–то неладное и расстроится. А расстроенный эксперт — это совсем не то, что было бы хорошо для Н–ского университета.

Специалистам протокольного отдела известны все города расположения экспертов, а также время перелета t_{ij} между различными парами аэропортов (как стартовых для экспертов, так и промежуточных). Не стоит беспокоиться о времени пересадки! Во всех аэропортах специально для экспертов готов бизнес–зал, и время там пролетает незаметно. Да и можно считать, что во всех аэропортах все рейсы хорошо стыкуются, т.е. если эксперт прилетел из i–го аэропорта в j–ый, а потом должен продолжить свой путь в k–ый аэропорт, то подходящий рейс всегда найдется.

Помогите специалистам протокольного отдела спланировать максимально долгий перелет для каждого эксперта, но только так, чтобы эксперт не прилетел в Н–ск расстроенным.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность $O(n^3)$, где n — общее число аэропортов, которые рассматривают специалисты протокольного отдела.

Решение:

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

“Утверждаю”
Председатель ГАК

Государственный экзамен на степень бакалавра
по направлению: фундаментальная информатика и информационные технологии; 2019 г.

Группа **ФИИТ-401** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если при любом ненулевом наборе значений переменных значение формы отрицательно. При каких значениях параметра t квадратичная форма

$$-2x_1^2 - 2x_2^2 - tx_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

отрицательно определена?

а) $t = 2$ ☐ б) $t = 1$ ☐ в) $t = -1$ ☐ г) $t = 0$ ☐ д) $t = -2$ ☐

2. **[3]** При каких значениях параметра a прямые

$$\ell_1\colon \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = a + \ t \end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_2\colon \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

пересекаются?

Ответ: ☐

3. **[3]** Укажите множество всех значений параметра p, при которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} - \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right)^2 \right|^p .$$

а) $p < \frac{1}{2}$ ☐ б) $p > \frac{1}{3}$ ☐ в) $p \geqslant \frac{1}{4}$ ☐ г) $p > \frac{1}{5}$ ☐

4. **[3]** Решите дифференциальное уравнение $f'_x = \frac{y^2}{9} \cdot f'_y$, выполнив замену: $x = u + v,\ y = \frac{9}{v}$.

Ответ: ☐

5. **[3]** Пусть T_0, T_1, S, M, L — основные замкнутые классы. Найти полином Жегалкина булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) \in S \backslash T_1$ без фиктивных переменных с нулевым коэффициентом при $x_1 \cdot x_2$.

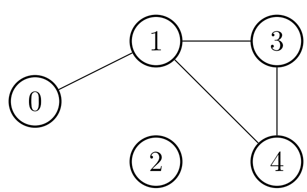
Ответ: ☐

6. **[3]** Используя метод резолюций доказать невыполнимость множества формул

$$\{\neg(\exists x)(A(x) \,\&\, (B(x) \to C(x))), \quad (\forall x)(B(x) \to \neg D(x)), \quad \neg(\forall x)(D(x) \to \neg A(x))\}\,.$$

Ответ:

7. **[3]** Граф на n вершинах задан матрицей смежности либо списком смежности. Напишите оценку временной сложности каждой из указанных операций в терминах Θ для обоих способов задания графа в зависимости от n. Во всех операциях вершины задаются своими номерами.



Пример графа

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0

Соответствующая матрица смежности, `int[,]`

0	$\to 1 \to \varnothing$
1	$\to 3 \to 4 \to 0 \to \varnothing$
2	$\to \varnothing$
3	$\to 1 \to 4 \to \varnothing$
4	$\to 1 \to 3 \to \varnothing$

Соответствующий список смежности, `LinkedList<int>[]`

Операция	Граф задан матрицей смежности	Граф задан списком смежности
Добавить ранее не существовавшее ребро между двумя вершинами		
Проверить существование ребра между парой вершин		
Найти вершину со степенью один (одно инцидентное ребро)		

8. **[3]** Опишите типы `A`, `B`, `C`, `D` так, чтобы приведенный фрагмент кода на языке C# компилировался и работал без ошибок, но, если убрать один любой оператор явного преобразования типа, происходила ошибка компиляции или времени выполнения. Среди типов `A`, `B`, `C`, `D` должен быть хотя бы один интерфейс. Если возможно несколько решений, запишите любое.

Фрагмент кода:

```
A a1 = new A();
C c1 = new C();
A a2 = c1
D d1 = (D)a2;
B b1 = (B)d1;
```

Образец оформления ответа:

```
interface A {}
class B: A {}
interface C: A {}
class D: B, C {}
```

Ответ:

Группа **ФИИТ-401** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

9. **[3]** Дана марковская цепь $X(n)$ со следующими переходными вероятностями:

$P(1,1) = \frac{2}{3}$ $P(1,2) = \frac{1}{3}$ $P(1,3) = 0$

$P(2,1) = \frac{3}{4}$ $P(2,2) = \frac{1}{4}$ $P(2,3) = 0$

$P(3,1) = 0$ $P(3,2) = 0.1$ $P(3,3) = 0.9$

В нулевой момент все состояния считаются равновероятными. Найдите вероятности того, что:

а) $X(0) = 1$,

б) $X(0) = 1$, $X(1) = 2$, $X(2) = 2$,

в) $X(11) = 2$, если $X(9) = 1$, $X(10) = 2$,

г) $X(2) = 3$,

д) $X(8) = 3$,

е) найдите стационарное распределение,

ж) найдите матожидание момента первого попадания в состояние 2.

Ответ:

10. **[3]** Множество вершин D графа $G = (V, E)$, такое, что каждая вершина из $V \backslash D$ смежна хотя бы с одной вершиной из D, называется *доминирующим*. Рассмотрим жадный алгоритм построения доминирующего множества:

1. положить $D = \emptyset$;
2. пока G — не пустой граф, повторять
3. выбрать в G вершину v максимальной степени;
4. положить $D = D + v$; $G = G - v - \{u \mid u \text{ смежна с } v\}$.

Приведите пример графа, для которого этот алгоритм строит не наименьшее по числу вершин доминирующее множество.

Ответ:

11. **[3]** В тридевятом царстве, в тридесятом государстве жила–была шпионская сеть из n шпионов. И был у этой сказочной сети сказочный центр, куда стекались сообщения. И вот в этой сказочной сети назначены сказочные учения. Шпионы должны передавать в центр сообщения о провале либо непосредственно, либо опосредованно через других шпионов. Причем делать они это должны тоже сказочно. А именно: сообщение о провале (своем или коллеги, непосредственно в центр или же товарищу — неважно) i–ый шпион всегда передает верно с вероятностью p_i (и, соответственно, меняет его на противоположное с вероятностью $1 - p_i$).

Помогите каждому шпиону понять, по какой цепочке нужно передать в центр сообщение о провале так, чтобы вероятность искажения сообщения оказалась минимальной.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность $O(n^2)$.

Решение: