Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика и компьютерные науки; 2014 г.**

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Среди перечисленных ниже наборов векторов отметьте все главные оси квадратичной формы $-x^2 + xy + 3xz + 2y^2 + 3yx - 2yz + 2z^2 + zx$.

а) $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)^\top, (-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^\top$ ☐

б) $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})^\top, (\frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}, \frac{-2}{\sqrt{45}})^\top, (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^\top$ ☐

в) $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})^\top, (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})^\top, (\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}})^\top$ ☒

г) $(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^\top, (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})^\top, (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0)^\top$ ☒

В заданиях 2–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

2. **[3]** Кратность нуля $x_0 = 0$ функции $f(x) = x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x$ равна

а) 3 ☐ б) 4 ☐ в) 5 ☒ г) 6 ☐

3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения о булевых функциях.

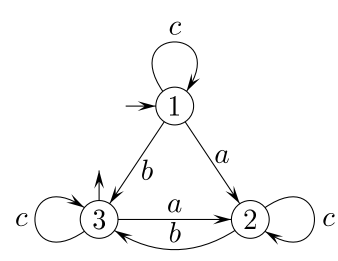
	верно	неверно
(3.1) **[1]** Функция, не сохраняющая нуль, не сохраняет единицу или не самодвойственна	☒	☐
(3.2) **[1]** Если функции f и g монотонны, то функция $f \sim g$ тоже монотонна	☐	☒
(3.3) **[1]** Если $\{0, f\}$ — базис булевых функций, то f зависит не менее чем от трех переменных	☐	☒

4. **[3]** Пусть $L_1 = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$, $L_2 = (ab)^*$. Тогда язык $L_1 \cap L_2$

а) конечный ☐
б) регулярный, но не конечный ☒
в) контекстно-свободный, но не регулярный ☐
г) не контекстно-свободный ☐

5. **[3]** Что нужно изменить в автомате, чтобы он распознавал язык $((\lambda + c^*b)c^*ac^*)(bc^*ac^*)^*$?

а) добавить дугу $3 \xrightarrow{a} 1$ ☐
б) удалить дугу $3 \xrightarrow{a} 2$ ☐
в) перенести терминальное состояние из 3 в 2 ☒
г) варианты а-в не подходят ☐



В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[2]** Замените два двойных интеграла одним, изменив порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

Ответ: $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

7. **[3]** В дифференциальном уравнении $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$ произвести замену переменных $x = u+t$, $y = u-t$, где $u = u(t)$. Записать полученное уравнение.

Ответ: $$u'' + 8uu'^3 = 0.$$

8. **[3]** Найдите базис подпространства $U \cap V$, где $U = \langle(1,2,-1,-1),(-1,5,4,2)\rangle$, а V — пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0, \\ 5x_1 & +4x_2 & +12x_3 & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 & +7x_2 & +15x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$$

Ответ: $$(1,2,-1,-1).$$

9. **[3]** Дан параллелограмм $ABCD$ с вершинами $A(3,0,-2)$, $B(5,3,-3)$, $D(4,-2,-1)$ и точка $S(2,4,-3)$. Найти объём пирамиды $SABCD$.

Ответ: $$2.$$

10. **[2]** Вершины графа G занумерованы натуральными числами. Рассмотрим следующий алгоритм правильной раскраски для G: вершины перебираются по возрастанию номеров, и каждая красится в наименьший цвет, не совпадающий с цветами ее окрашенных соседей.

Приведите пример, в котором приведенный алгоритм раскрасит граф не в минимально возможное число цветов.

Ответ: $$\begin{array}{ccc} 3 & — & 2 \\ | & & | \\ 1 & — & 4 \end{array}$$

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.______________________________________

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

11. **[3]** Командный студенческий чемпионат мира по программированию начинается с красочной церемонии открытия. Организаторы церемонии составили список из N мероприятий (элементов церемонии) и для каждого элемента определили множество элементов, которые должны предшествовать ему, и множество элементов, которые должны состояться позже. В самом деле, негоже, если Губернатор Области выступает после Главы Администрации Города или Ректора Федерального Университета, но не возбраняется, если перед ним симфонический оркестр сыграет студенческий гимн (как не возбраняется и то, что гимн будет исполнен позднее). Кроме того, надо учитывать, что сцена одна, и события могут происходить только последовательно. Требуется так составить последовательность мероприятий, чтобы их порядок был согласован с заданными предпочтениями.

Предложите математическую модель этой задачи, как задачи на графе, и опишите (неформально) алгоритм определяющий порядок событий, имеющий сложность $O(N^2)$. При каком условии такой порядок найти невозможно?

Решение: топологическая сортировка орграфа следования элементов. Невозможна, если орграф содержит циклы.

Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика и компьютерные науки; 2014 г.**

Группа **КН-40_** Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Среди перечисленных ниже наборов векторов отметьте все главные оси квадратичной формы $-xy + 2xz - yx + 2yz$.

а) $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top, (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^\top, (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top$ ☒

б) $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})^\top, (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$ ☐

в) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^\top, (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^\top$ ☐

г) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^\top, (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top, (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^\top$ ☐

В заданиях 2–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

2. **[3]** Кратность нуля $x_0 = 0$ функции $f(x) = \sin x - \ln(1 + x + x^2) + \frac{x^2 - x^3}{2}$ равна

а) 3 ☐ б) 4 ☒ в) 5 ☐ г) 6 ☐

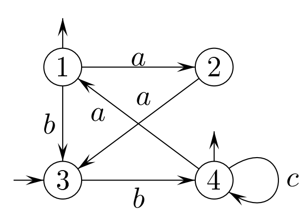
3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения о булевых функциях.

	верно	неверно
(3.1) **[1]** Самодвойственная функция от двух переменных, сохраняющая нуль, монотонна	☒	☐
(3.2) **[1]** Если функции f и g таковы, что функция $f \sim g$ сохраняет 0, то либо f, либо g тоже сохраняет 0	☒	☐
(3.3) **[1]** Существует унарная функция f, образующая вместе с функцией $x^2 + xy + y^2$ базис булевых функций	☒	☐

4. **[3]** Пусть $L_1 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$, $L_2 = a^*$. Тогда язык $L_1 \cup L_2$

а) конечный ☐ б) регулярный, но не конечный ☐
в) контекстно-свободный, но не регулярный ☐ г) не контекстно-свободный ☒

5. **[3]** Что нужно изменить в автомате, чтобы он распознавал язык $((c + bc^*a)(b + a^2))^*(c + bc^*a + bc^*)$?



а) добавить дугу $3 \xrightarrow{c} 4$ ☐

б) добавить дугу $3 \xrightarrow{c} 1$ ☒

в) сделать состояние 2 терминальным ☐

г) варианты а-в не подходят ☐

В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[2]** Замените два двойных интеграла одним, изменив порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-1} \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Ответ: $$\int_{0}^{1} \int_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

7. **[3]** В дифференциальном уравнении $(1+x^2)^2 y'' = y$ произвести замену переменных $x = \operatorname{tg} t$, $y = u/\cos t$, где $u = u(t)$. Записать полученное уравнение.

Ответ: $u'' = 0$.

8. **[3]** Найдите базис подпространства $U \cap V$, где $U = \langle (1,-4,2,5), (2,3,-1,1) \rangle$, а V — пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 20x_2 - 8x_3 - 13x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(1,-4,2,5)$.

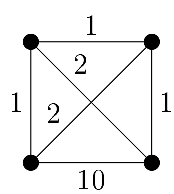
9. **[3]** Дан тетраэдр с вершинами $A(4,-2,3)$, $B(5,-4,4)$, $C(3,2,2)$ и $D(6,1,2)$. Найти его объём.

Ответ: 1.

10. **[2]** Рассмотрим следующий алгоритм решения задачи коммивояжера в полном орграфе G:
   1 упорядочить все ребра по возрастанию весов и положить $T = \varnothing$;
   2 пока в T менее $n-1$ ребер, добавлять в него минимальное по весу ребро, не образующее цикла с уже имеющимися и не приводящее к появлению в T вершины степени 3;
   3 добавить в T ребро, замыкающее цикл, объявить T маршрутом коммивояжера.

Приведите пример, для которого приведенный алгоритм построит неоптимальный маршрут.

Ответ:



Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

11. **[3]** Организация командного студенческого чемпионата мира по программированию — задача серьезная. Оргкомитету приходится брать на себя непосильный труд решения сложных и даже, казалось бы, неразрешимых логистических проблем. Вы даже не можете себе представить, какие странные и загадочные предметы приходится порой доставлять на площадку соревнований!

Весь закупленный скарб сосредоточен на складе университета (У). Сам финал проходит одновременно на N площадках, и все оборудование со склада необходимо развезти по ним. К счастью, оборудование не очень объемное и целиком помещается в грузовик транспортной компании «Везунчик». Схема расчетов с компанией такова: за доставку из пункта А в пункт Б платится фиксированная цена $C(\text{АБ})$, промежуточные пункты погрузки/выгрузки не предусмотрены. Например, если нужно развезти оборудование по площадкам 1, 2, и 3, причем на площадку 2 удобно ехать через площадку 1, то можно заказать перевозку от У до 1, от 1 до 2, и отдельно — от У до 3. К сожалению, N гораздо больше 3. К счастью, $C(\text{БА}) = C(\text{АБ})$. Требуется подсчитать, сколько будет стоить университету самый дешевый план перевозки оборудования для финала.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите (неформально) алгоритм ее решения, имеющий сложность $O(N^2)$.

Решение: поскольку изначально все находится в У, если в оптимальном плане мы везем что-то из А в Б, то из Б в А мы не везем ничего. Поскольку перевозку из А в Б можно осуществить за один раз, оптимальный план использует каждый маршрут не более одного раза. Тогда легко проверить, что оптимальное множество перевозок образует остов графа площадок (включающего У). Значит задача сводится к задаче о минимальном остове. За $O(N^2)$ ее решает алгоритм Прима(-Ярника-Дейкстры).

Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика и компьютерные науки; 2014 г.**

Группа **КН-40_** Ф.И.О.______________________________________

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Среди перечисленных ниже наборов векторов отметьте все главные оси квадратичной формы $x^2 - xy - 3xz + y^2 - yx + 4yz + 4z^2 - zx$.

а) $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top, (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^\top, (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top$ ☐
б) $(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})^\top, (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$ ☐
в) $(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})^\top, (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})^\top$ ☒
г) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^\top, (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top, (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^\top$ ☒

В заданиях 2–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

2. **[3]** Кратность нуля $x_0 = 0$ функции $f(x) = \ln\cos x + \sqrt[6]{1 + 3x^2} - 1$ равна

а) 2 ☐ б) 3 ☐ в) 4 ☒ г) 6 ☐

3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения о булевых функциях.

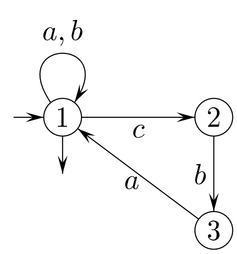
	верно	неверно
(3.1) **[1]** Любая функция, не сохраняющая 0 и 1, немонотонна и нелинейна	☐	☒
(3.2) **[1]** Если функции f и g самодвойственны, то функция $f \sim g$ тоже самодвойственна	☐	☒
(3.3) **[1]** Существует функция f от двух переменных такая, что $\{1, f\}$ — базис булевых функций	☒	☐

4. **[3]** Пусть $L_1 = \{a^n b^n a^m b^m \mid m, n \geqslant 0\}$, $L_2 = (ab)^*$. Тогда язык $L_1 \cup L_2$

а) конечный ☐ б) регулярный, но не конечный ☐
в) контекстно-свободный, но не регулярный ☒ г) не контекстно-свободный ☐

5. **[3]** Что нужно изменить в автомате, чтобы он распознавал язык $(b(ab)^* + (cb)^*a)^*$?

а) удалить дугу $1 \xrightarrow{a} 1$ ☐
б) добавить дугу $3 \xrightarrow{c} 2$ ☒
в) сделать состояние 3 терминальным ☐
г) варианты а-в не подходят ☐



В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[2]** Замените два двойных интеграла одним, изменив порядок интегрирования:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)\,dx\,dy$$

Ответ: $$\int_{-1}^0 \int_{\sqrt{x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

7. **[3]** В дифференциальном уравнении $y'' + 8yy'^3 = 0$ произвести замену переменных $x = (t-u)/2$, $y = (t+u)/2$, где $u = u(t)$. Записать полученное уравнение.

Ответ: $u'' + (t+u)(1+u')^3 = 0.$

8. **[3]** Найдите базис подпространства $U \cap V$, где $U = \langle (5,-4,3,-1), (3,-2,5,1) \rangle$, а V — пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & & = 0, \\ -4x_1 & -6x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0, \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1,1,1,1).$

9. **[3]** Дана призма $ABCA'B'C'$ с основанием ABC; $A(1,4,3)$, $B(2,1,8)$, $C(-1,3,4)$, $C'(-2,4,3)$. Найти её объём.

Ответ: 3.

10. **[2]** Рассмотрим жадный алгоритм построения в сети G кратчайшего (s,t)-пути:

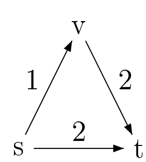
1 положить СТЕК пустым; добавить в СТЕК вершину s;

2 пока t не в СТЕКе, считать очередную вершину v из СТЕКа, среди всех ребер начинающихся в v и заканчивающихся в вершине, не входящей в СТЕК, найти ребро наименьшего веса (v,w) и добавить w в СТЕК; если таковых ребер нет, то СТОП;

3 если $w = t$, последовательность вершин в стеке образует искомый маршрут.

Приведите пример, для которого приведенный алгоритм построит не кратчайший путь или вообще не найдет путь, хотя он существует.

Ответ:



Группа **КН-40**_   Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

11. **[3]** На командном студенческом чемпионате мира все N команд входят в зал соревнований не толпой, а в строгом порядке, одна за другой. Организаторы чемпионата хотят, чтобы процедура заполнения зала выглядела красочно, ведь надо учитывать интересы зрителей и телевидения. Будет скучно, если команды будут заходить по алфавиту или по номерам компьютеров: зал будет наполняться неравномерно, цвета футболок могут мало отличаться, да и сильнейшие команды, возможно, вынуждены будут выйти в числе первых. Поэтому, организаторы для каждой команды, с учетом цвета футболок, номера компьютера, региона, который они представляют, и рейтинга университета составили по два списка: список команд, которые должны выйти раньше их, и команд, которые должны выйти позже. Требуется присвоить каждой команде номер ее выхода в зал так, чтобы не нарушались заданные предпочтения.

Предложите математическую модель этой задачи, как задачи на графе, и опишите (неформально) алгоритм, определяющий порядок выхода команд и имеющий сложность $O(N^2)$. При каком условии требуемый порядок найти невозможно?

Решение: топологически отсортировать орграф следования команд. Невозможно, если орграф содержит цикл.

Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика и компьютерные науки; 2014 г.**

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, неполный ответ или отсутствие ответа – в 0 баллов.

В задании 1 нужно выбрать все правильные ответы.

1. **[3]** Среди перечисленных ниже наборов векторов отметьте все главные оси квадратичной формы $x^2 - xy - xz + y^2 - yx - yz + z^2 - zx - zy$.

а) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top, (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0)^\top, (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})^\top$ ☐

б) $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}))^\top, (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)^\top$ ☐

в) $(0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top$ ☐

г) $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^\top, (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})^\top, (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^\top$ ☒

В заданиях 2–5 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

2. **[3]** Кратность нуля $x_0 = 0$ функции $f(x) = 2\ln\cos x + \sin x^2$ равна

а) 2 ☐ б) 3 ☐ в) 4 ☒ г) 6 ☐

3. Укажите, верны или неверны приведённые ниже утверждения о булевых функциях.

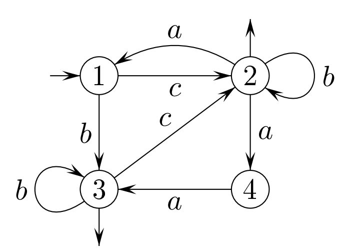
	верно	неверно
(3.1) **[1]** Существует самодвойственная функция от двух переменных, существенно зависящая от каждой	☐	☒
(3.2) **[1]** Если функции f и g таковы, что функция $f \sim g$ линейна, то f и g линейны	☐	☒
(3.3) **[1]** Существует функция f от двух переменных такая, что $\{x, f\}$ — базис булевых функций	☐	☒

4. **[3]** Пусть $L_1 = \{a^n b^{n+m} a^m \mid m, n \geqslant 0\}$, $L_2 = a^* b^*$. Тогда язык $L_1 \setminus L_2$

а) конечный ☐ б) регулярный, но не конечный ☐
в) контекстно-свободный, но не регулярный ☒ г) не контекстно-свободный ☐

5. **[3]** Что нужно изменить в автомате, чтобы он распознавал язык $(b + cb^*a^2)^+(cb^* + \lambda) + cb^*$?

а) сделать состояние 2 нетерминальным ☐
б) Удалить дугу $2 \xrightarrow{a} 1$ ☒
в) сделать состояние 4 терминальным ☐
г) варианты а-в не подходят ☐



В заданиях 6–10 нужно вписать в бланк ответ.

6. **[2]** Замените два двойных интеграла одним, изменив порядок интегрирования:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Ответ: $$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

7. **[3]** В дифференциальном уравнении $y'' = 0$ произвести замену переменных $x = \operatorname{arctg} t$, $y = u\Big/\sqrt{1+t^2}$, где $u = u(t)$. Записать полученное уравнение.

Ответ: $$(1+t^2)^2 u'' = u.$$

8. **[3]** Найдите базис подпространства $U \cap V$, где $U = \langle (2,3,0,1), (1,-1,2,3) \rangle$, а V — пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & & x_4 & = 0, \\ -3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & = 0, \\ 5x_1 & +7x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(1,-1,2,3)$.

9. **[3]** Дан параллелограмм $ABCD$ с вершинами $A(2,0,5)$, $B(1,2,4)$, $D(4,2,4)$ и точка $S(5,-4,9)$. Найти объём пирамиды $SABCD$.

Ответ: 4.

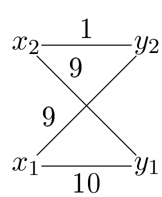
10. **[2]** Дан полный взвешенный двудольный граф $G = (X, Y, E)$. Рассмотрим следующий алгоритм построения полного паросочетания максимального веса:

1 положить текущее паросочетание $M = \varnothing$;

2 пока M не полное, среди ребер, соединяющих свободные вершины, выбрать ребро e наибольшего веса и добавить к M.

Приведите пример, для которого приведенный алгоритм построит паросочетание не максимального веса.

Ответ:



Группа **КН-40**_   Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

11. **[3]** Непростые задачи пришлось решать участникам финала командного студенческого чемпионата мира еще до начала соревнований. Мы оставим задачу поиска финансирования за кадром и сосредоточимся на задаче десантирования в город Бург (далее пункт Б), в том числе из таких удаленных мест, как, например, Буэнос-Айрес (далее, пункт А). Участники из пункта А составили карту всех авиарейсов всех потенциально подходящих авиакомпаний и хотят найти способ добраться из А в Б как можно раньше, чтобы получше акклиматизироваться. О каждом рейсе известны пункт отправления, дата/время отправления, пункт прибытия и дата/время прибытия, причем, во избежание путаницы, все время дается по Гринвичу. Минимальное время стыковки в любом аэропорту — один час, общее количество аэропортов — N. Помогите команде пункта А добраться в пункт Б в самое раннее время из возможных!

Предложите математическую модель этой задачи, как задачи оптимизации на графе, и опишите (неформально) алгоритм ее решения сложности $O(N^2)$.

Решение: в орграфе авиарейсов решить задачу о кратчайшем пути из А в Б вариацией алгоритма Дейкстры: при добавлении нового аэропорта X в список просмотренных, текущее время прибытия в непросмотренные аэропорты пересчитывается не по всем авиарейсам из X, а только по тем, на которые прибывший в X успеет.