Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика, компьютерные науки; 2013 г.**

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №1

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа — в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Число точек локального максимума функции $f(x) = \cos 2x - \cos 4x$ на интервале $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ равно

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) 2 ☒ г) 3 ☐

2. **[2]** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ подпространство U задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Тогда размерность его ортогонального дополнения $U^{\perp}$ равна

а) 1 ☐ б) 2 ☒ в) 3 ☐ г) 4 ☐

3. У однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей A n-го порядка есть два ненулевых решения. Верны или нет следующие выводы:

	верно	неверно
(3.1) **[1]** эти решения являются собственными векторами A	☒	☐
(3.2) **[1]** 0 - собственное число A	☒	☐
(3.3) **[1]** ранг A не превосходит $n-2$	☐	☒

В заданиях 4–10 нужно вписать в бланк ответ.

4. **[3]** Найдите булеву функцию f, которая образует вместе с константами 0 и 1 базис класса всех булевых функций.

Ответ: любая б.ф., которая сохраняет 0 и 1, немонотонна и нелинейна; напр., $x + y + yz$

5. **[3]** Найти число различных отношений линейного порядка на множестве $\{1, \ldots, 2n\}$, в которых любое нечетное число меньше любого четного.

Ответ: $(n!)^2$

6. **[3]** Даны точки $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$. Вычислите в декартовых и полярных координатах двойной интеграл $\iint\limits_{\triangle OAB} xy\,dxdy$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

7. **[3]** Найдите массу кривой $\gamma : \{x = \cos^2 t,\ y = \cos t \sin t,\ z = \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\}$, если ее плотность равна $\rho(x, y, z) = yx$.

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{2} - 7}{15}$

8. **[3]** В LR(1)-грамматике G существует вывод $S \Rightarrow AbC \Rightarrow AabC \Rightarrow aabC \Rightarrow aabCbD \Rightarrow aabcbD \Rightarrow aabcbd$. Напишите самое длинное слово (слова), которые окажутся в стеке при восходящем анализе слова $w = aabcbd$.

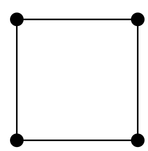
Ответ: $AbCbd,\ AbCbD$

9. **[3]** Характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ равен $(\lambda+1)^3(\lambda-2)$, а все собственные вектора $\mathcal{A}$ порождают двумерное подпространство. Укажите Жорданову матрицу оператора $\mathcal{A}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. **[3]** Для каждой вершины v графа G через $r(v)$ обозначим наибольшее из расстояний от v до других вершин графа, а минимум из величин $r(v)$ по всем вершинам назовем *радиусом* графа и обозначим $R(G)$. Через $D(G)$ обозначим *диаметр* графа — наибольшее из всех расстояний между вершинами.

Приведите пример графа G, для которого $D(G) = R(G) = 2$.

Ответ: 

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №1 (лист 2)

11. **[3]** Информационная сеть связывает N пунктов связи. Для каждого канала (i, j) известна вероятность $p(i, j)$ правильной передачи информации от пункта i до пункта j, при этом $p(i, j) = p(j, i)$ и вероятности правильной работы каналов не зависят друг от друга. Требуется передать сообщение от заданного пункта A до заданного пункта B по самому надежному пути, т.е., такому, где вероятность искажения сигнала наименьшая.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность не более $O(N^3)$.

Решение: для получения $O(N^3)$ подправить алгоритм Форда-Беллмана для случая, когда вес пути равен произведению весов ребер (вероятность пересечения независимых событий). На самом деле, задача решается за $O(N^2 \log N)$: заменить веса на их логарифмы по основанию, меньшему 1, и решить обычную задачу о минимальном пути в сети с неотрицательными весами алгоритмом Дейкстры.

Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика, компьютерные науки; 2013 г.**

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.__________________________________

Экзаменационный билет №2

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Число точек локального минимума функции $f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ на интервале $(0, \pi)$ равно

а) 0 ☐ б) 1 ☒ в) 2 ☐ г) 3 ☐

2. **[2]** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ подпространство U задано системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Тогда размерность его ортогонального дополнения $U^{\perp}$ равна

а) 1 ☐ б) 2 ☐ в) 3 ☒ г) 4 ☐

3. У неоднородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей A n-го порядка есть два различных решения. Верны или нет следующие выводы:

	верно	неверно
(3.1) **[1]** сумма этих решений является собственным вектором A	☐	☒
(3.2) **[1]** разность этих решений является собственным вектором A	☒	☐
(3.3) **[1]** 0 - собственное число A	☒	☐

В заданиях 4–10 нужно вписать в бланк ответ.

4. **[3]** Найдите булеву функцию f, которая образует вместе с константой 1 и дизъюнкцией базис класса всех булевых функций.

Ответ: любая б.ф., которая сохраняет 0, не сохраняет 1, немонотонна и линейна; напр., $x + y$

5. **[3]** Найти число различных отношений линейного порядка на множестве $\{1, \ldots, 2n\}$, в которых сумма любых двух соседних элементов нечетна.

Ответ: $2(n!)^2$

6. **[3]** Даны точки $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(1,2)$. Вычислите в декартовых и полярных координатах двойной интеграл $\iint\limits_{\triangle OAB} x^2 y\,dxdy$.

$$\text{Ответ:} \qquad \frac{4}{15}$$

7. **[3]** Найдите массу кривой $\gamma : \{x = \sin t \cos t,\ y = \sin^2 t,\ z = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\}$, если ее плотность равна $\rho(x,y,z) = x$.

$$\text{Ответ:} \qquad \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

8. **[3]** В LR(1)-грамматике G существует вывод $S \Rightarrow Aa \Rightarrow ABa \Rightarrow ABBa \Rightarrow ABBBa \Rightarrow bBBBa \Rightarrow baBBa \Rightarrow baaBa \Rightarrow baaba$. Напишите самое длинное слово (слова), которые окажутся в стеке при восходящем анализе слова $w = baaba$.

Ответ: Aa, AB, Ab

9. **[3]** Характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ равен $(\lambda - 3)^4$, а все собственные вектора $\mathcal{A}$ порождают трёхмерное подпространство. Укажите Жорданову матрицу оператора $\mathcal{A}$.

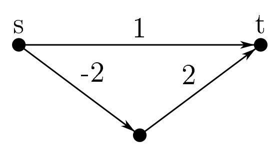
$$\text{Ответ:} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. **[3]** В сети G есть ребра с отрицательными весами и нет контуров отрицательной длины. Рассмотрим следующий алгоритм нахождения кратчайшего пути от заданной вершины s до заданной вершины t:

1 найти K — максимум из абсолютных величин весов ребер сети G;
2 вес каждого ребра сети G увеличить на K, получая сеть Γ;
3 найти в Γ кратчайший (s,t)-путь P алгоритмом Дейкстры; вернуть P.

Приведите пример, когда этот алгоритм сработает неправильно.

Ответ:



Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №2 (лист 2)

11. **[3]** В секретном конструкторском бюро работают N сотрудников. В бюро имеется M комнат. Новый зам. директора по режиму потребовал, чтобы в каждой комнате находилось не более одного сотрудника и сотрудники не меняли комнаты в течение рабочего дня. Зная для каждого сотрудника список комнат, в которые он имеет доступ, требуется выяснить, можно ли удовлетворить новым требованиям режима.

Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность не более $O(N^3)$.

Решение: проверить наличие паросочетания из N ребер в двудольном графе сотрудники–комнаты.

Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика, компьютерные науки; 2013 г.**

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Число точек локального максимума функции $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ на интервале $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ равно

а) 0 ☐ б) 1 ☒ в) 2 ☐ г) 3 ☐

2. **[2]** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ подпространство U задано системой уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

Тогда размерность его ортогонального дополнения $U^\perp$ равна

а) 1 ☐ б) 2 ☒ в) 3 ☐ г) 4 ☐

3. Неоднородная система линейных уравнений с квадратной матрицей A n-го порядка несовместна. Верны или нет следующие выводы:

	верно	неверно
(3.1) **[1]** у однородного спутника данной системы решение не единственно	☒	☐
(3.2) **[1]** столбец свободных коэффициентов не является собственным вектором матрицы A	☒	☐
(3.3) **[1]** 0 - собственное число A	☒	☐

В заданиях 4–10 нужно вписать в бланк ответ.

4. **[3]** Найдите булеву функцию f, которая образует вместе с константой 0 и отрицанием базис класса всех булевых функций.

Ответ: любая б.ф., которая сохраняет 0, самодвойственна и нелинейна; напр., $xy + xz + yz$

5. **[3]** Найти число различных отношений порядка на множестве $\{1, \ldots, n\}$, в которых единственную пару несравнимых элементов образуют числа 1 и 2.

Ответ: $(n-1)!$

6. **[3]** Даны точки $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$. Вычислите в декартовых и полярных координатах двойной интеграл $\iint\limits_{\triangle OAB} (x+y)\,dxdy$.

$$\text{Ответ:} \qquad \frac{4}{3}$$

7. **[3]** Найдите массу кривой $\gamma : \{x = \cos t \sin t,\ y = \cos^2 t,\ z = \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\}$, если ее плотность равна $\rho(x,y,z) = xy$.

$$\text{Ответ:} \qquad \frac{8\sqrt{2}-7}{15}$$

8. **[3]** В LR(1)-грамматике G существует вывод $S \Rightarrow A \Rightarrow AaAb \Rightarrow AaaAb \Rightarrow caaAb \Rightarrow caaAab \Rightarrow caacab$. Напишите самое длинное слово (слова), которые окажутся в стеке при восходящем анализе слова $w = caacab$.

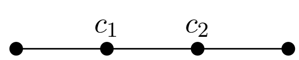
Ответ: $AaAa$, $AaAb$

9. **[3]** Характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ равен $(\lambda-4)^3(\lambda+2)$, а все собственные вектора $\mathcal{A}$ порождают двумерное подпространство. Укажите Жорданову матрицу оператора $\mathcal{A}$.

$$\text{Ответ:} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

10. **[3]** Для каждой вершины v графа G через $r(v)$ обозначим наибольшее из расстояний от v до других вершин графа. Вершины с минимальным значением $r(v)$ называются *центрами* графа.

Приведите пример графа G, у которого ровно половина вершин являются центрами.

Ответ: 

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №3 (лист 2)

11. **[3]** Как известно, в Китае и еще в некоторых странах во всех банках страны курсы пересчета валют из одной в другую одинаковы. В одной из таких стран ходит N валют и для каждой пары валют (i, j) задан обменный курс $c(i, j)$, т.е. количество единиц j-й валюты получаемой при продаже одной единицы i-й. Например, если i — рубль, а j — доллар, то, возможно, $c(i, j) = 1/33$, а $c(j, i) = 32.5$. Курсы устроены так, что если Вы производите серию обменов и возвращаетесь к той валюте, с которой начали, то получившаяся у Вас сумма заведомо не больше первоначальной.

Некто имеет валюту A, но должен осуществить платеж в валюте B, и хочет найти самый выгодный вариант перевода первой валюты во вторую. Предложите математическую модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность не более $O(N^3)$.

Решение: адаптировать Форда-Беллмана для максимизации веса пути, равного произведению весов дуг. Условие на серию обменов равносильно отсутствию отрицательных циклов. Альтернатива: прологарифмировать курсы по основанию, меньшему 1 и применить стандартного Форда-Беллмана.

Институт математики и компьютерных наук

Государственный экзамен на степень бакалавра математики
по направлению: **математика, компьютерные науки; 2013 г.**

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.________________________________

Экзаменационный билет №4

Количество баллов за правильное решение каждого задания указано в квадратных скобках жирным шрифтом. Если в задании предлагаются варианты ответов, то неправильный ответ на это задание оценивается в -1 балл, отсутствие ответа – в 0 баллов.

В заданиях 1–3 нужно выбрать единственный правильный вариант ответа.

1. **[2]** Число точек локального минимума функции $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \cos x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ равно

а) 0 ☐ б) 1 ☐ в) 2 ☒ г) 3 ☐

2. **[2]** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ подпространство U задано системой уравнений

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 4x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Тогда размерность его ортогонального дополнения $U^\perp$ равна

а) 1 ☐ б) 2 ☐ в) 3 ☒ г) 4 ☐

3. Ранг квадратной матрицы A n-го порядка равен $n-2$. Верны или нет следующие выводы:

	верно	неверно
(3.1) **[1]** совместная система линейных уравнений с матрицей A имеет не единственное решение	☒	☐
(3.2) **[1]** линейно независимых собственных векторов у A больше, чем различных собственных чисел	☒	☐
(3.3) **[1]** если у A есть собственное число кратности 2013, то это не единственное кратное собственное число A	☐	☒

В заданиях 4–10 нужно вписать в бланк ответ.

4. **[3]** Найдите булеву функцию f, которая образует вместе с константой 0 и конъюнкцией базис класса всех булевых функций.

Ответ: любая б.ф., которая сохраняет 1, не сохраняет 0, немонотонна и линейна; напр., $x \leftrightarrow y$

5. **[3]** Найти число различных отношений линейного порядка на множестве $\{1, \ldots, n\}$, в которых $1 < 2$ и $2 < 3$.

Ответ: $n!/6$

6. **[3]** Даны точки $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(2,1)$. Вычислите в декартовых и полярных координатах двойной интеграл $\iint\limits_{\triangle OAB} (x-y)\,dxdy$.

Ответ: 1

7. **[3]** Найдите массу кривой $\gamma : \{x = \sin^2 t,\ y = \sin t \cos t,\ z = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\}$, если ее плотность равна $\rho(x,y,z) = y$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

8. **[3]** В LR(1)-грамматике G существует вывод $S \Rightarrow AbC \Rightarrow abC \Rightarrow abCaB \Rightarrow abcaB \Rightarrow abcaBc \Rightarrow abcabc$. Напишите самое длинное слово (слова), которые окажутся в стеке при восходящем анализе слова $w = abcabc$.

Ответ: $AbCaBc$

9. **[3]** Характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ равен $(\lambda+5)^4$, а все собственные вектора $\mathcal{A}$ порождают трёхмерное подпространство. Укажите Жорданову матрицу оператора $\mathcal{A}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

10. **[3]** Геолог насобирал огромное количество образцов породы, но унести с собой может не больше N килограмм. Для отбора образцов геолог пользуется очень простым алгоритмом: кладет в рюкзак образцы по одному, каждый раз выбирая самый тяжелый из тех, которые можно положить в рюкзак без нарушения ограничения на общий вес.

Приведите пример, когда геолог смог бы унести набор большего веса, чем тот, что он соберет по своему алгоритму.

Ответ: $N = 4$; образцы веса 3, 2 и 2

Группа **КН-40**_ Ф.И.О.____

Экзаменационный билет №4 (лист 2)

11. **[3]** Железнодорожная сеть Анчурии связывает N городов. Известно, что из любого города можно добраться в любой другой город либо непосредственно, либо через другие города. Кабинет министров Анчурии принял решение электрифицировать железные дороги. Но беда в том, что все железнодорожные ветки электрифицировать не получится, поскольку стоимость проекта превысит бюджет небогатой банановой республики. Было принято решение, что электрификация должна быть такой, чтобы из каждого города в каждый город можно было бы добраться на поездах на электрической тяге. Технология электрификации такова, что одна тяговая подстанция обеспечивает работу не более K километров пути. При этом действие подстанции распространяется только на одну железнодорожную ветку. Например, если город A связан с городом B, город B связан с городом C, а тяговая подстанция расположена на ветке AB, то она не обеспечивает работу никакого участка ветки BC. По экологическим соображениям тяговые подстанции нельзя располагать в городах. Для каждой пары соседних городов A, B известна протяженность $\rho(A, B)$ железной дороги, их соединяющей (если таковая имеется). Требуется выяснить, какое наименьшее количество тяговых подстанций потребуется для электрификации железнодорожной сети по указанным выше правилам.

Предложите модель этой задачи как задачи оптимизации на графе и опишите неформально алгоритм ее решения, имеющий сложность не более $O(N^2)$.

Решение: Найти минимальный остов в графе, вершины которого — города, а рёбра — железнодорожные ветки, при этом вес ребра вычисляется как $\lceil \rho(A, B)/K \rceil$.