§8. Аксиоматическая теория исчисления высказываний

Один случай формальной теории, совпадающей с логикой высказываний.

Опр. Алфавитом теории **T** называется множество, содержащее заглавные латинские буквы, с индексом или без, скобки (и), символы $\neg$ и $\rightarrow$.

Опр. Формулой теории **T** называется слово над алфавитом теории, являющееся формулой логики высказываний.

Замечания:

1) Пропозициональные буквы (логические переменные) – латинские буквы;

связки – $\neg$ и $\rightarrow$;

2) Формулой называется либо пропозициональная буква, либо выражение $(\neg F)$, $(F \rightarrow G)$.

Опр. Аксиомой теории **T** называется каждая из формул:

(A1) $F \to (G \to F)$;

(A2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;

(A3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$;

где F и G – формулы теории **T**.

Замечание: можно считать, что аксиом бесконечно много, но каждая построена по одному из трех шаблонов.

Опр. Правилом вывода в теории **T** называется правило *modus ponens*: из двух формул F, $(F \to G)$ непосредственным следствием является формула G.

Краткое обозначение: $\dfrac{F, (F \to G)}{G}$.

Опр. Теория **T** – набор из алфавита, множества всех возможных формул, множества аксиом, правила вывода *modus ponens*.

Опр. Пусть Г – подмножество формул теории **Т**. Формула F_n выводится из Г, если существует последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, такая, что каждая F_i либо является аксиомой, либо принадлежит Г, либо получена по правилу вывода из формул среди $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$.

Обозначение: Г $\vdash F_n$.

Замечание: формулы множества Г удобно называть гипотезами.

Опр. Формула F_n называется теоремой, если существует последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, такая, что каждая F_i либо является аксиомой, либо получена по правилу вывода из формул среди $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$, т.е. F_n выводится из пустого множества.

Обозначение: $\vdash F_n$.

Замечание: любую теорему можно использовать как аксиому при построении вывода.

Опр. Аксиоматическая теория называется непротиворечивой, если не существует формулы P, такой, что и P и $\neg P$ являются теоремами.

Опр. Аксиоматическая теория называется разрешимой, если существует алгоритм, проверяющий для любой формулы P, является ли P теоремой.

Лемма 1. Формула $(F \to F)$ – теорема теории **Т.**

Доказательство:

1. В аксиому (A2) подставим вместо G – $(F \to F)$; вместо H – F:
$(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$.
2. В аксиому (A1) подставим вместо G – $(F \to F)$:
$F \to ((F \to F) \to F)$.
3. Из 1 и 2 следует по (*mp*) $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$.
4. В аксиому (A1) подставим вместо G – F:
$F \to (F \to F)$.
5. Из 3 и 4 следует по (*mp*) $(F \to F)$.

Лемма доказана.

Теорема о дедукции.
Если $\{\Gamma, F\} \vdash G$, то $\Gamma \vdash (\mathrm{F} \to \mathrm{G})$.

(Частный случай) Теорема Эрбана.
Если $\{F\} \vdash G$, то $\vdash (\mathrm{F} \to \mathrm{G})$.

Теорема о дедукции.

Если {Γ, F} $\vdash$ G, то Γ $\vdash$ (F → G).

Доказательство теоремы о дедукции:

Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n = G$ вывод из {Γ, F}.

Индукцией по номеру i, где $1 \le i \le n$, докажем, что Γ $\vdash$ $(F \to F_i)$.

Б.И. $i = 1$. Докажем, что Γ $\vdash$ $(F \to F_1)$.

Формула F_1 либо принадлежит Γ, либо аксиома, либо совпадает с F.

В первых двух случаях $(F \to F_1)$ следует по (mp) из F_1 и аксиомы (A1) $F_1 \to (F \to F_1)$.

В третьем случае получаем теорему $(F \to F)$.

Ш.И. $i > 1$. Пусть для любого $k < i$ выполняется $\Gamma \vdash (F \to F_k)$.
Докажем, что $\Gamma \vdash (F \to F_i)$.
1 случай) F_i принадлежит Γ или является аксиомой.
Тогда $(F \to F_i)$ следует по (mp) из F_i и аксиомы (A1)
$F_i \to (F \to F_i)$.

2 случай) F_i совпадает с F.
Тогда получаем теорему $(F \to F)$.

3 случай) F_i следует по (mp) из F_j и F_m, $j < i$, $m < i$, $F_m = F_j \to F_i$.
По предположению индукции:
$\Gamma \vdash (F \to F_j)$; $\Gamma \vdash (F \to F_m)$, т.е. $\Gamma \vdash (F \to (F_j \to F_i))$.
Из последней формулы и аксиомы (A2)
$(F \to (F_j \to F_i)) \to ((F \to F_j) \to (F \to F_i))$ по (mp) следует
$((F \to F_j) \to (F \to F_i))$.

Из последней формулы и $(F \to F_j)$ по (mp) следует $(F \to F_i)$.

Теорема доказана.

Следствия:
1. $(F \to G), (G \to H) \vdash (F \to H)$;
2. $(F \to (G \to H)), G \vdash (F \to H)$.

Доказательство 1:
F, $(F \to G)$, G по (mp), $(G \to H)$, H по (mp).
$\Rightarrow (F \to G), (G \to H), F \vdash H$.
По теореме о дедукции $(F \to G), (G \to H) \vdash (F \to H)$.

Доказательство 2:
F, $(F \to (G \to H))$, $(G \to H)$ по (mp), G, H по (mp).
$\Rightarrow (F \to (G \to H)), G, F \vdash H$.
По теореме дедукции $(F \to (G \to H)), G \vdash (F \to H)$.

Лемма 2. (без доказательства)
Следующие формулы являются теоремами теории **T**:

1) $\neg\neg F \to F$;

2) $F \to \neg\neg F$;

3) $\neg F \to (F \to G)$;

4) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$;

5) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$;

6) $F \to (\neg G \to \neg (F \to G))$;

7) $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$.

Определим новые связки:
$(F \mathbin{\&} G)$ означает $\neg\,(F \to \neg G)$;
$(F \vee G)$ означает $(\neg\, F) \to G$;
$(F \leftrightarrow G)$ означает $(F \to G) \mathbin{\&} (G \to F)$.

Теорема (о полноте).
Формула F теории **T** является теоремой $\Leftrightarrow$ формула логики высказываний F тождественно истинная.

Следствие.
Теория **T –** непротиворечивая и разрешимая.

§9. Доказательство теоремы о полноте

Теорема (о полноте).
Формула F теории **T** является теоремой $\Leftrightarrow$ формула логики высказываний F тождественно истинная.

Доказательство:
$\Rightarrow$) Дано: формула F теории **T** является теоремой.
1. Покажем, что каждая аксиома тождественно истинная.
(A1) $F \to (G \to F)$.

F	G	$(G \to F)$	$F \to (G \to F)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

(A2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$.

F	G	H	$(F \to (G \to H))$	$((F \to G) \to (F \to H))$	$(\ldots) \to (\ldots)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

(A3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$.

F	G	$(\neg G \to \neg F)$	$((\neg G \to F) \to G)$	$(\ldots) \to (\ldots)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

2. Покажем, что если формулы F и $(F \to G)$ тождественно истинные, то полученная по (mp) формула G – тоже тождественно истинная.

(от противного) Предположим, что существует интерпретация φ в узком смысле, такая, что $\varphi(G) = 0$. Тогда $\varphi(F) = 1$, и $\varphi(F \to G) = 0$. Противоречие с тем, что $(F \to G)$ тождественно истинная.

Следовательно, G тождественно истинная.

3. Пусть последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – вывод теоремы F_n. Тогда все формулы в последовательности тождественно истинные.

Необходимость доказана.

$\Leftarrow$) Дано: формула F теории **T** тождественно истинная.

Лемма. Пусть F – формула, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – пропозициональные буквы, входящие в F. Пусть дано распределение φ значений истинности для $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Пусть $B_i' = \begin{cases} B_i, & \text{если } \varphi(B_i) = 1 \\ \neg B_i, & \text{если } \varphi(B_i) = 0 \end{cases}$.

Пусть $F' = \begin{cases} F, & \text{если } \varphi(F) = 1 \\ \neg F, & \text{если } \varphi(F) = 0 \end{cases}$.

Тогда $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash F'$.

Доказательство леммы: индукция по числу n связок в формуле F.

Б.И. Если $n = 0$, то $F = B_1$.
Утверждение леммы в этом случае:
$\{B_1\} \vdash B_1$ (если $\varphi(B_1) = 1$);

$\{\neg B_1\} \vdash \neg B_1$ (если $\varphi(B_1) = 0$). Очевидно верно.

Ш.И. Пусть лемма верна для любой формулы с количеством связок $j < n$.

Случай 1. $F = \neg G$.
В формуле G количество связок $n - 1 < n$.

1.1. Пусть $\varphi(G) = 1$, тогда $\varphi(F) = 0$,
т.е. $G' = G$, $F' = \neg F = \neg\neg G$.

$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash G$, теорема $G \to \neg\neg G$,
$\Rightarrow$ (mp) $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash \neg\neg G$,

т.е. $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash F'$.

1.2. Пусть $\varphi(G) = 0$, тогда $\varphi(F) = 1$,
т.е. $G' = \neg G$, $F' = F = \neg G$.

$$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash \neg G,$$

т.е. $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash F'$.

Случай 2. $F = G \to H$.

В формуле G количество связок < n.
В формуле H количество связок < n.

$$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash G'.$$

$$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash H'.$$

2.1. Пусть $\varphi(G)$ = 0, тогда $\varphi(F)$ = 1,
т.е. $G' = \neg G$, $F' = F$.

$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash \neg G$,
теорема $\neg F \to (F \to G)$ в форме $\neg G \to (G \to H)$,
$\Rightarrow$ (mp) $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash (G \to H)$,

т.е. $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash F'$.

2.2. Пусть $\varphi(H) = 1$, тогда $\varphi(F) = 1$,
т.е. $H' = H$, $F' = F$.

$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash H$,
аксиома (A1) в форме $H \to (G \to H)$,
$\Rightarrow$ (mp) $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash (G \to H)$,

т.е. $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash F'$.

2.3. Пусть $\varphi(G) = 1$, $\varphi(H) = 0$, тогда $\varphi(F) = 0$,
т.е. $G' = G$, $H' = \neg H$, $F' = \neg F$.

$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash G$, $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash \neg H$,

теорема $F \to (\neg G \to \neg(F \to G))$
в форме $G \to (\neg H \to \neg(G \to H))$,
$\Rightarrow$ (mp) $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash \neg(G \to H)$,

т.е. $\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash F'$.

Лемма доказана.

Продолжение доказательства достаточности теоремы о полноте:

Пусть $F \equiv 1$, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – пропозициональные буквы, входящие в F.

Для любой интерпретации φ по лемме

$\{B_1', B_2', \ldots, B_k'\} \vdash F$.

Рассмотрим φ_1 и φ_2, совпадающие на $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$:

$\varphi_1(B_k) = 1 \Rightarrow \{B_1', \ldots, B_{k-1}', B_k\} \vdash F$;

$\varphi_2(B_k) = 0 \Rightarrow \{B_1', \ldots, B_{k-1}', \neg B_k\} \vdash F$.

По теореме о дедукции

$\{B_1', \ldots, B_{k-1}'\} \vdash (B_k \to F)$; $\{B_1', \ldots, B_{k-1}'\} \vdash (\neg B_k \to F)$.

Воспользуемся теоремой $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$ (∗)

1) теорема (∗), где F заменяем на B_k, G заменяем на F:

$(B_k \to F) \to ((\neg B_k \to F) \to F)$.

2) $(B_k \to F)$.

3) по (mp) $((\neg B_k \to F) \to F)$.

4) $(\neg B_k \to F)$.

5) по (mp) F.

Следовательно, $\{B_1', \ldots, B_{k-1}'\} \vdash F$.

Аналогично, рассмотрев два случая истинности B_{k-1}, получим $\{B_1',\ldots,B_{k-2}'\} \vdash F$.

И т.д. Получим $\varnothing \vdash F$.

Теорема доказана.