Глава II. Логика предикатов

§1. Предикаты и операции с ними. Формулы.

Опр. Пусть $M \neq \varnothing$. Назовём n-местным предикатом, заданным на M выражение, содержащее n переменных, обращающееся в высказывание при замене переменных элементами из M.

Обозначение: $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример. $P(x)$ = «Число x является простым» – одноместный предикат на $\mathbb{N}$. $P(3)$ – истинное высказывание; $P(4)$ – ложное.

Опр. Назовём нульместным предикатом высказывание.

Операции с высказываниями переносятся на предикаты: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция.

Например, для конъюнкции новое определение формулируется так: Опр. Пусть $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-местные предикаты, заданные на M. Конъюнкцией этих предикатов называется новый предикат $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такой, что для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ высказывание $W(a_1, a_2, \ldots, a_n) = U(a_1, a_2, \ldots, a_n) \& V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Пример. $U(x)$ = «Число x является простым»; $V(x)$ = «Число x является четным» – одноместные предикаты на $\mathbb{N}$. Тогда $U(x) \& V(x)$ = «Число x = 2».

Кроме этих пяти операций введём ещё две операции навешивания кванторов.

Опр. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикат, заданный на M, y – переменная (либо совпадающая с x_i, либо новая). Назовём предикатом, полученным навешиванием квантора общности на переменную y и предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражение «Для любого y выполняется $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$».

Обозначение: $(\forall y)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Опр. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местный предикат, заданный на M, y – переменная (либо совпадающая с x_i, либо новая). Назовём предикатом, полученным навешиванием квантора существования на переменную y и предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражение «Существует y, такой, что выполняется $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$».

Обозначение: $(\exists y)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пример. $P(x)$ = «Число x является простым» – одноместный предикат на $\mathbb{N}$.

$(\exists x)P(x)$ = «Существует простое число x» – высказывание.

$(\exists y)P(x)$ = «Существует y, такое, что x простое число» – одноместный предикат с переменной x.

Пусть Ф – множество символов функций,
R – множество символов предикатов,
V – множество переменных.

В дальнейшем $\Phi \cup R$ называют сигнатурой.

Опр. Термом называется выражение одного из двух видов:
1) переменная или константа (символ нуль-местной функции);
2) $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где $f \in \Phi$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы.

Опр. Атомарной формулой называется выражение
$A(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где $A \in R$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы.

Опр. Формулой логики предикатов называется выражение одного из двух видов:

1) атомарная формула;

2) $(F)\ \&\ (G)$, $(F) \vee (G)$, $\neg(F)$, $(F) \to (G)$, $(F) \leftrightarrow (G)$, $(\forall y)(F)$, $(\exists y)(F)$, где F и G – формулы логики предикатов, y – переменная.

Опр. В формулах $(\forall y)(F)$, $(\exists y)(F)$, формула F называется областью действия квантора по переменной y.

Для уменьшения количества скобок договоримся о приоритетах операций: у кванторов выше, чем у связок, для связок так же, как в высказываниях.

§2. Интерпретация, равносильность. Законы логики предикатов. Логическое следствие.

Опр. Вхождение переменной в формулу называется связанным, если переменная стоит непосредственно за квантором, или входит в область действия квантора по этой переменной.

Вхождение переменной свободное – в противном случае.

Опр. Переменная называется свободной в формуле, если существует хотя бы одно свободное вхождение этой переменной в формулу.

Пример. 1. $(\exists x)A(x)\,\&\,B(x,y)$.

2. $(\exists x)(A(x)\,\&\,B(x,y))$.

Опр. Интерпретацией формулы F на непустом множестве M называется отображение φ, ставящее в соответствие:
символу константы – элемент из M,
символу n-местной функции f – некоторую функцию на M,
символу n-местного предиката A – некоторый предикат, заданный на M.

Результатом $\varphi(F)$ интерпретации формулы является предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются свободными в формуле F.

Замечание: интерпретация формулы F в модели (M, {множество конкретных предикатов}, φ) – высказывание, полученное из предиката $\varphi(F)$ при замене свободных переменных элементами из M.

Пример. $F = (\exists x)(A(x) \,\&\, B(x, y))$.

Пусть $M = \mathbb{N}$. Отображение φ ставит в соответствие:

$A(x)$ – «Число x простое»,
$B(x, y)$ – « $x < y$ ».

$\varphi(F)$ = «Существует число x, простое и меньшее y».

Модель ($\mathbb{N}$, { $A(x)$ – «Число x простое», $B(x, y)$ – « $x < y$ »}).
Интерпретация в этой модели: «Существует число, простое и меньшее 5» = 1.

Далее у формул будем указывать, какие свободные переменные входят – $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Опр. Формулы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются равносильными, если для любой интерпретации φ на множестве M, и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, значения истинности высказываний $\varphi(F(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ и $\varphi(G(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ совпадают.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Опр. Формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется тождественно истинной, если для любой интерпретации φ на множестве M, и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, высказывание $\varphi(F(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ истинно.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1$$

Теорема.

$F \equiv G \;\Leftrightarrow\; F \leftrightarrow G \equiv 1$.

Законы логики предикатов:

1) – 21) аналогичны законам логики высказываний.

22) $(\forall x)(F(x)\,\&\,G(x)) \equiv (\forall x)F(x)\,\&\,(\forall x)G(x)$;

23) $(\exists x)(F(x) \vee G(x)) \equiv (\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$;

Доказательство 22) $(\forall x)(F(x)\,\&\,G(x)) \equiv (\forall x)F(x)\,\&\,(\forall x)G(x)$:

$\varphi((\forall x)(F(x)\,\&\,G(x))) = 1 \Leftrightarrow$ для любого элемента a, принадлежащего M, выполняется $\varphi(F(a)\,\&\,G(a)) = 1 \Leftrightarrow \varphi(F(a)) = 1$ и $\varphi(G(a)) = 1$.

Т.е. $\varphi((\forall x)F(x)) = 1$ и $\varphi((\forall x)G(x)) = 1 \Leftrightarrow$ $\varphi((\forall x)F(x)\,\&\,(\forall x)G(x)) = 1$.

Замечание:

1. $(\forall x)(F(x) \vee G(x)) \not\equiv (\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$.

Для доказательства неравносильности можно привести контрпример. Пусть $F(x)$ = «Число *x* чётное», $G(x)$ = «Число *x* нёчетное» – одноместные предикаты на $\mathbb{N}$.

Тогда и левая часть, и правая часть равенства являются высказываниями:

л.ч. = «Для любого натурального числа *x* выполняется, что *x* чётное или *x* нечётное» = 1;

п.ч. = «Любое натуральное число чётное или любое натуральное число нечётное» = 0 ∨ 0 = 0.

2. $(\exists x)(F(x)\ \&\ G(x)) \not\equiv (\exists x)F(x)\ \&\ (\exists x)G(x)$;

Доказательством служит такая же интерпретация, как в предыдущем случае.

л.ч. = «Существует натуральное число *x*, такое, что выполняется *x* чётное и *x* нечётное» = 0;
п.ч. = «Существует натуральное число чётное и существует натуральное число нечётное» = 1 & 1 = 1.

24) $(\forall x)(\forall y)F(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)F(x,y)$;

25) $(\exists x)(\exists y)F(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)F(x,y)$;

Замечание: $(\forall x)(\exists y)F(x,y) \not\equiv (\exists y)(\forall x)F(x,y)$.

Для доказательства неравносильности можно привести контрпример. Пусть $F(x,y)$ = « $x \le y$ » – двухместный предикат на $\mathbb{N}$.

л.ч. = «Для любого числа x существует y, превышающий или равный x» = 1.

п.ч. = «Существует число y, такое, что для любого x выполняется $x \le y$» = 0.

26) $\neg(\forall x)F(x) \equiv (\exists x)\neg F(x)$;

27) $\neg(\exists x)F(x) \equiv (\forall x)\neg F(x)$;

28) $(\forall x)(F(x) \vee G) \equiv (\forall x)F(x) \vee G$;

29) $(\exists x)(F(x) \,\&\, G) \equiv (\exists x)F(x) \,\&\, G$;

Пусть $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$, $F(x)$ не содержит *y*, $G(y)$ не содержит *x*.

30) $(Q_1 x)(Q_2 y)(F(x) \,\&\, G(y)) \equiv (Q_1 x)F(x) \,\&\, (Q_2 y)G(y)$;

31) $(Q_1 x)(Q_2 y)(F(x) \vee G(y)) \equiv (Q_1 x)F(x) \vee (Q_2 y)G(y)$;

32) $(\forall x)F(x) \equiv (\forall z)F(z)$;

33) $(\exists x)F(x) \equiv (\exists z)F(z)$.

Опр. Формула $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется логическим следствием формул $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если для любой интерпретации φ на множестве M, и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$, из того, что все значения $\varphi(F_1(a_1, a_2, \ldots, a_n))$, …, $\varphi(F_k(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ истинны, следует, что значение $\varphi(G(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ истинно.

Опр. Множество формул $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполнимо, если существует интерпретация φ на множестве M, и существуют элементы $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, такие, что все значения $\varphi(F_1(a_1, a_2, \dots, a_n))$, …, $\varphi(F_m(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинны.

Невыполнимо – в противном случае.

Теорема.
Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \dots, F_n$ $\Leftrightarrow$ множество формул $\{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ не выполнимо.

Замечание: выполнимость формулы на конечных моделях и бесконечных могут не совпадать.