Глава II. Избранные вопросы теории автоматов

§1. Автоматы-преобразователи (transducers). Машина Тьюринга. ДАМП.

Конечные автоматы с двумя лентами

Опр. Конечный автомат Мили – набор (Q, X, Y, φ, g, q_0), где

Q – конечное множество (внутренних) состояний автомата;

X – конечное множество входных символов, «входной алфавит»;

Y – конечное множество выходных символов, «выходной алфавит»;

$q_0 \in Q$ – начальное состояние;

φ – функция переходов (всюду определенная):

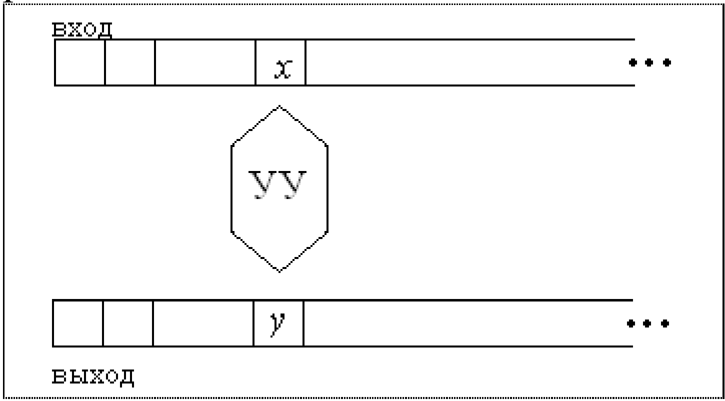
$\varphi: \; Q \times X \to Q$.

g – функция выходов (всюду определенная):

$g: \; Q \times X \to Y$.

$(Q, X, Y, \varphi, g, q_0)$

Опр. (как механическое устройство). Конечный автомат состоит из управляющего устройства (УУ), входной ленты и выходной ленты, разбитых на ячейки.



На каждом такте, находясь в состоянии q и просматривая на входной ленте ячейку с символом x, автомат выполняет следующие действия: переходит в состояние q', где $\varphi(q, x) = q'$; записывает на выходной ленте $y = g(q, x)$, сдвигается по каждой ленте вправо на одну ячейку.

Если перед началом работы автомата Мили на входной ленте было слово u, то просмотрев его до конца, автомат запишет на выходной ленте слово w. Будем говорить, что автомат преобразует слово u в слово w.

Опр. Конечный автомат Мура – набор (Q, X, Y, φ, g, q_0), где

. . . . .

g – функция выходов (всюду определенная):

$g: \ Q \to Y$.

Теорема (без док-ва).

Для каждого автомата Мура существует равносильный автомат Мили, и наоборот.

Замечание: возможности детерминированных автоматов с двумя лентами ограничены.

Опр. Конечным трансдьюсером называется (Q, Σ_1, Σ_2, φ, Q_0, Q_F),
где Q – конечное множество (внутренних) состояний автомата;
Σ_1 – конечное множество входных символов, «входной алфавит»;
Σ_2 – конечное множество выходных символов, «выходной алфавит»;
$Q_0 \subseteq Q$ – множество начальных состояний;
$Q_F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний
φ – функция переходов:
$\varphi \subseteq Q \times \Sigma_1^* \times \Sigma_2^* \times Q$.

Замечание: $\varphi \subseteq Q \times \Sigma_1^* \times \Sigma_2^* \times Q$ указывает неоднозначное соответствие между парами (q, u) и (v, q'). Как механическое устройство трансдьюсер переходит из состояния q в состояние q' по входному слову u, записав выходное слово v.

Частный случай: $\varphi \subseteq Q \times (\Sigma_1 \cup \varepsilon) \times (\Sigma_2 \cup \varepsilon) \times Q$ использует переходы по одной букве алфавита Σ_1, и позволяет не сдвигаться по входной ленте в случае перехода по ε. Аналогично, на выходе может не записываться никакой символ.

Пусть τ – трансдьюсер. Рассмотрим бинарное отношение между Σ_1^* и Σ_2^*: $R(\tau) = \{(x, y) \mid \exists q_0 \in Q_0, \exists q \in Q_F, q_0 \xrightarrow{x \mid y} q\}$.

Опр. Пусть $L \subseteq \Sigma_1^*$.
$\tau(L) = \{y \in \Sigma_2^* \mid \exists x \in L : (x, y) \in R(\tau)\}$.

Теорема. Для любого конечного трансдьюсера τ и любого регулярного языка L язык $\tau(L)$ – регулярный.

Машина Тьюринга – автомат-преобразователь, где одна лента используется и как входная, и как выходная.

Опр. (как автомат). Детерминированная машина Тьюринга – набор $(Q, \Sigma, \delta, q_0, q_F)$, где

Q – конечное множество состояний машины;

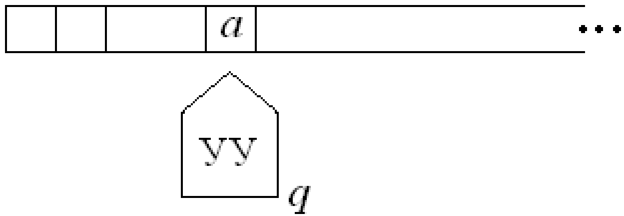
Σ – конечное множество символов (входных и выходных), включающее пустой символ, «алфавит»;

q_0 – начальное состояние;

q_F – заключительное состояние;

δ – функция переходов (не обязательно всюду определенная), $\delta: Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{L, R, \_\}$.

Опр. (как механическое устройство). Машина Тьюринга состоит из управляющего устройства (УУ), и ленты, разбитой на ячейки.
В каждый момент УУ находится в каком-нибудь из состояний множества Q, и просматривает ячейку, в которой записан какой-нибудь из символов множества Σ.



Машина работает тактами.

На каждом такте, находясь в состоянии q и просматривая ячейку с символом a, машина выполняет следующие действия:
1) если $\delta(q,a)=(q',a',L)$, то УУ переходит в состояние q', записывает в ячейку символ a', сдвигается по ленте влево (если это возможно);

2) если $\delta(q,a)=(q',a',R)$, то УУ переходит в состояние q', записывает в ячейку символ a', сдвигается по ленте вправо;

3) если $\delta(q,a)=(q',a')$, то УУ переходит в состояние q', записывает в ячейку символ a', остаётся на месте;

4) если $\delta(q,a)$ не определена, то машина останавливается.

Машина Тьюринга начинает работу в состоянии q_0 (начальное состояние), просматривая самую первую слева ячейку.

Машина Тьюринга заканчивает работу, когда переходит в состояние q_F (заключительное состояние), или когда не определено значение функции перехода $\delta(q, a)$.

Опр. Пусть $u \in \Sigma^*$ – слово, записанное на ленте в начале работы машины Тьюринга; $w \in \Sigma^*$ – слово, записанное на ленте после остановки машины.
Будем говорить, что w – значение функции f (от аргумента u), вычислимой машиной Тьюринга, если она остановилась в заключительном состоянии.

Замечание. Алгоритм – это машина Тьюринга, вычисляющая значение функции f от аргумента u, где слово u является входом, слово $w = f(u)$ является выходом.

Тезис Тьюринга – гипотеза о том, что для всякого алгоритма над каким-нибудь алфавитом Σ (все данные – слова над Σ) существует машина Тьюринга, вычисляющая для входа u значение выхода $w = f(u)$.

Опр. Нетерминированная машина Тьюринга – набор (Q, Σ, δ, q_0, q_F), где

...

δ – функция переходов,

$\delta: \ Q \times \Sigma \to 2^Q \times \Sigma \times \{L, R, \_\}$.

Опр. Детерминированный автомат с магазинной памятью (ДАМП) – набор (Q, Σ, Γ, δ, q_0, ∇, Q_F), где

Q, Σ, q_0, Q_F – как в ДКА;

Γ – конечное множество магазинных символов;

$\nabla \in \Gamma$ – символ дна магазина;

δ – функция переходов (всюду определенная):

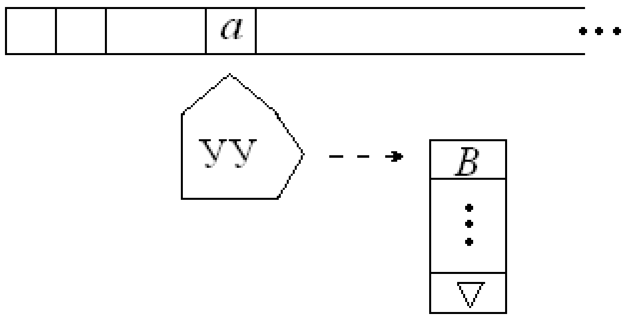
$\delta:\ Q \times \Sigma \times \Gamma \to Q \times \{s, r\} \times \Gamma^{*}$, где s, r – фиксированные символы.

Магазин = стек = «Первым пришёл – последним ушёл».

Очередь = «Первым пришёл – первым ушёл».

$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \nabla, Q_F)$

Опр. (как механическое устройство). ДАМП состоит из управляющего устройства (УУ), входной ленты и магазина.
В каждый момент УУ находится в каком-нибудь состоянии из множества Q, просматривает ячейку ленты и верхний символ магазина.



Автомат работает тактами.

Если $\delta(q,a,B)=(q',r,\gamma)$, то УУ переходит в состояние q', сдвигается по ленте вправо, выталкивает из магазина верхний символ (B) и заталкивает по одному символы слова $\gamma\in\Gamma^*$.

Если $\delta(q,a,B)=(q',s,\gamma)$, то аналогично, только без сдвига по ленте.

Если верхним символом в магазине является ∇, то выталкивания символа из магазина не происходит.

Особенность ДАМП: если $\delta(q, a, B) = (q, s, B)$, то возможно «зацикливание» работы автомата, т.е. он работает до бесконечности, оставаясь в одном и том же состоянии.

Опр. ДАМП допускает слово w, если просмотрев все буквы слова w автомат переходит из начального состояния в заключительное.

Опр. Язык, допускаемый ДАМП – множество всех слов, допускаемых ДАМП.

Замечание – класс языков, допускаемых ДАМП, шире класса регулярных языков.

Пример. $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ – не является регулярным, но допускается ДАМП.

В начальном состоянии для первой буквы a ДАМП заталкивает в магазин A, оставаясь в начальном состоянии. Далее для каждой буквы a ДАМП выталкивает из магазина верхний символ и заталкивает в магазин A^2. Когда ДАМП встречает букву b, он переходит во второе состояние. Во втором состоянии для каждой буквы b ДАМП выталкивает из магазина верхний символ и ничего не заталкивает. В заключительное состояние автомат переходит, только если встречает специальный символ «конец слова» и в магазине сверху находится дно магазина.