§3. Приведённый ДКА

Опр. Состояние q называется недостижимым, если для любого входного слова автомат никогда не переходит в q (начиная с начального состояния).

Замечание: на диаграмме переходов не существует ориентированных маршрутов (путей) из начального состояния в недостижимое q.

Опр. Два состояния s и t автомата называются эквивалентными, если начиная с состояния s, автомат допускает те же слова, что и начиная с t.

Замечание: аналогично можно определить эквивалентные состояния в разных автоматах.

Опр. Автомат называется приведенным, если он не содержит эквивалентных состояний, и все состояния достижимые.

Опр. Два автомата называются эквивалентными, если они допускают одинаковый язык.

(т.е. их начальные состояния эквивалентны)

Задача: для данного автомата найти приведенный эквивалентный автомат.

Алгоритм нахождения достижимых (недостижимых) вершин:

1. $Q_0 = \{q_0\}$.
2. $Q_1 = \{\varphi(q_0, x) \mid x \in \Sigma\} \cup Q_0$.
3. $Q_2 = \{\varphi(q, x) \mid x \in \Sigma, q \in Q_1\} \cup Q_1$.

…

k + 1. $Q_k = \{\varphi(q, x) \mid x \in \Sigma, q \in Q_{k-1}\} \cup Q_{k-1}$.

Алгоритм останавливается, когда $Q_k = Q_{k-1}$ (стабилизация).

Результат – множество достижимых вершин $Q_k = Q_{k-1}$.

Алгоритм поиска эквивалентных состояний:

1. Найти разбиение S_1 множества Q из двух классов $\{K_1, K_2\}$, где $K_1 = Q_f$, $K_2 = Q \setminus Q_f$.

k. Найти S_k, разбивая классы разбиения S_{k-1} на подклассы по следующему признаку: если для каждой $x \in \Sigma$ результаты функции перехода $\varphi(s, x)$ и $\varphi(t, x)$ принадлежат одному классу разбиения S_{k-1}, то состояния s и t оставляем в одном классе. В противном случае, состояния s и t оказываются в разных классах.

Алгоритм останавливается, если $S_k = S_{k-1}$.

Результат – разбиение на классы эквивалентных состояний.

Лемма (без доказательства).
Состояния s и t эквивалентны $\Leftrightarrow$ выполнены условия:
(1) «Условие подобия» – s и t либо оба заключительные, либо нет.
(2) «Условие преемственности» – на любом входном символе $\varphi(s, x)$ и $\varphi(t, x)$ эквивалентны.

Теорема.
Для любого конечного автомата существует приведенный эквивалентный конечный автомат.

Теорема.
Для любого конечного автомата существует приведенный эквивалентный конечный автомат.

Доказательство:

Пусть ДКА = (Q, Σ, φ, q_0, Q_f).

1. Применяя алгоритм, найдем множество достижимых состояний Q_k. Удалив недостижимые состояния, будем считать что $Q = Q_k$.

2. Применяя алгоритм, найдем разбиение $S = \{K_1, \ldots, K_m\}$ на классы эквивалентных состояний.

3. Построим автомат (S, Σ, ψ, s_0, S_f), где $S=\{K_1,\ldots,K_m\}$, $q_0 \in s_0 = K_i$, $S_f = \{K \mid K \subseteq Q_f\}$.

$$\psi(K,a)=K' \iff \exists q \in K, \exists q' \in K' : \ \varphi(q,a)=q'.$$

4. Очевидно, что если существует последовательность состояний $q_0, q_1, \ldots, q_n$: $q_n \in Q_f$, $\varphi(q_0,a_1)=q_1$, $\varphi(q_1,a_2)=q_2$, …, $\varphi(q_{n-1},a_n)=q_n$, то существует последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$: $s_n \in S_f$, $\psi(s_0,a_1)=s_1$, $\psi(s_1,a_2)=s_2$, …, $\psi(s_{n-1},a_n)=s_n$. И наоборот.

Автоматы допускают одинаковые слова, т.е. эквивалентны.