§4. Недетерминированный конечный автомат. Язык, допускаемый НКА

Опр. Недетерминированный конечный автомат (НКА) –
набор (Q, Σ, δ, Q_0, Q_f), где
Q – конечное множество (внутренних) состояний автомата;
Σ – конечное множество (входных) символов, «алфавит»;
$Q_0 \subseteq Q$ – множество начальных состояний;
$Q_f \subseteq Q$ – множество заключительных состояний;
δ – функция переходов (всюду определенная):
$\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$ (т.е. $\delta(q,a) = \{q_1, \ldots\} \subseteq Q$).

Замечание: часто встречается определение НКА, в котором только одно начальное состояние.

Как механическое устройство, НДА переходит в какое-нибудь состояние $q' \in \delta(q,a)$; или останавливается, если $\delta(q,a) = \varnothing$.

Способы задания НДА:

1. Расширенная таблица переходов.

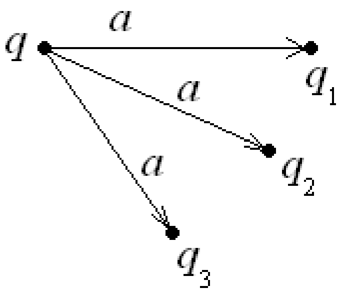
символы алфавита Σ

		…	a	…	заключ.
q_0					
…					
q			$q_1, \ldots$		0 или 1

состояния из Q

Если $\delta(q,a) = \varnothing$, то ячейка пустая. Можем считать, что в этом случае $\delta(q,a)$ не определена.

2. Диаграмма переходов.



Пример: «Игровой автомат».
Пусть стоимость игры 10 рублей.
Автомат принимает монеты 5 и 10 рублей, $\Sigma = \{5, 10\}$.

$$Q = \{q_0, \qquad q_1, \qquad q_2, \qquad q_3\}$$

«ожидание клиента»	«кредит 5 рублей»	«проигрыш»	«выигрыш»

Расширенная таблица переходов.

	5	10	заключ.
q_0			
q_1			
q_2			
q_3			

Пример: «Игровой автомат».
Пусть стоимость игры 10 рублей.
Автомат принимает монеты 5 и 10 рублей, $\Sigma = \{5, 10\}$.

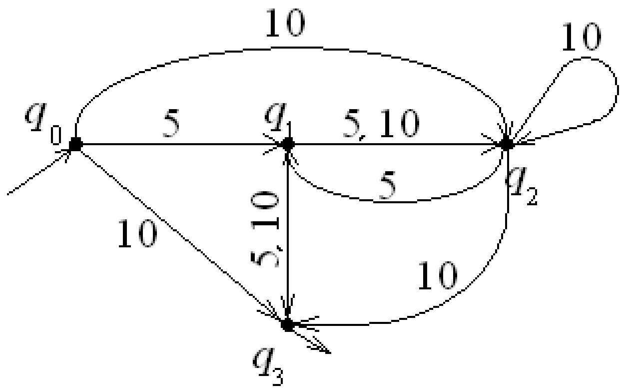
$$Q = \{q_0, \quad q_1, \quad q_2, \quad q_3\}$$

«ожидание клиента»	«кредит 5 рублей»	«проигрыш»	«выигрыш»

Расширенная таблица переходов.

	5	10	заключ.
q_0	q_1	q_2, q_3	0
q_1	q_2, q_3	q_2, q_3	0
q_2	q_1	q_2, q_3	0
q_3			1

Диаграмма переходов:



Опр. НКА допускает слово $w = a_1 \ldots a_n$, если существует последовательность состояний $q_0, q_1, \ldots, q_n$: $q_0 \in Q_0$, $q_n \in Q_f$, $\delta(q_0, a_1) \ni q_1$, $\delta(q_1, a_2) \ni q_2$, …, $\delta(q_{n-1}, a_n) \ni q_n$.

(т.е. просмотрев все буквы слова *w* автомат может перейти из какого-нибудь начального состояния в заключительное)

Опр. Язык, допускаемый НКА – множество всех слов, допускаемых НКА.

Теорема (Рабин-Скотт, 1 часть).
Для любого НКА существует ДКА, допускающий тот же язык.

Теорема (Рабин-Скотт, 1 часть).
Для любого недетерминированного конечного автомата существует (детерминированный) конечный автомат, допускающий тот же язык.

Доказательство:

Пусть НДА = (Q, Σ, δ, Q_0, Q_f).

Построим ДКА = (P, Σ, φ, p_0, P_f), где $P = 2^Q$, $p_0 = Q_0$,
$P_f = \{ p \subseteq Q \mid p \cap Q_f \neq \varnothing \}$.

$$\varphi(p, x) = p' = \bigcup_{q \in p} \delta(q, x).$$

Покажем, что если НКА допускает слово $w = a_1 \ldots a_n$, то построенный ДКА – тоже.

Пусть существует последовательность состояний $q_0, q_1, \ldots, q_n$:

$q_0 \in Q_0$, $q_n \in Q_f$, $\delta(q_0, a_1) \ni q_1$, $\delta(q_1, a_2) \ni q_2$, …, $\delta(q_{n-1}, a_n) \ni q_n$.

Тогда $\varphi(p_0, a_1) = p_1 = \delta(q_0, a_1) \ni q_1$;

$$\varphi(p_1, a_2) = p_2 \supseteq \delta(q_1, a_2) \ni q_2;$$

$$\varphi(p_{n-1}, a_n) = p_n \supseteq \delta(q_{n-1}, a_n) \ni q_n, \text{ и } p_n \in P_f.$$

Аналогично доказывается, что если ДКА допускает слово $w = a_1 \ldots a_n$, то исходный НКА – тоже.

Пример построения ДКА, допускающего тот же язык, что игровой автомат.

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

	5	10	заключ.
q_0	q_1	q_2, q_3	0
q_1	q_2, q_3	q_2, q_3	0
q_2	q_1	q_2, q_3	0
q_3			1

Состояниями ДКА можно взять не все подмножества:

$p_0 = \{q_0\}$, $p_1 = \{q_1\}$, $p_2 = \{q_2, q_3\}$.

$P_f = \{p_2\}$.

	5	10	заключ.
p_0	p_1	p_2	0
p_1	p_2	p_2	0
p_2	p_1	p_2	1