§5. НКА с ε-переходами, нормальный ε-НКА. Алгоритм ε-замыкания.

Опр. Недетерминированный конечный автомат с ε- переходами (ε-НКА) – набор (Q, Σ, δ, Q_0, Q_f), где

Q – конечное множество (внутренних) состояний автомата;

Σ – конечное множество (входных) символов, «алфавит»;

$Q_0 \in Q$ – множество начальных состояний;

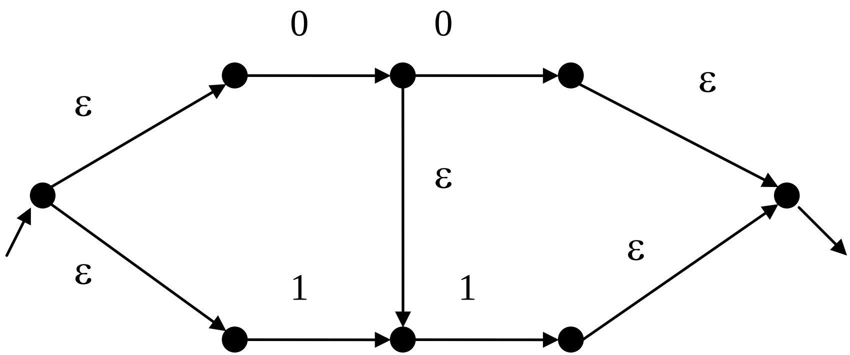
$Q_f \subseteq Q$ – множество заключительных состояний;

δ – функция переходов (всюду определенная):

$\delta: \; Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$.

Замечание: ε-НКА может не сдвигаться по входной ленте на некоторых тактах, при этом переходить в новое состояние.

Пример. ε-НКА, эквивалентный НКА с несколькими начальными состояниями



Утверждение. Для любого ε-НКА существует ε-НКА с единственным начальным и единственным заключительным состояниями.

Опр. Нормальным ε-НКА называется ε-НКА $(Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$, с единственным начальным состоянием q_0 и единственным заключительным состоянием q_f.

Теорема (Рабин-Скотт, 2 часть).
Для любого ε-НКА существует НКА, допускающий тот же язык.

Доказательство:

Пусть (Q, Σ, δ, q_0 , q_f) – нормальный ε-НКА.

Рассмотрим бинарное отношение R на Q: $q_i R q_j \Leftrightarrow q_j \in \delta(q_i, \varepsilon)$.

Построим его рефлексивно-транзитивное замыкание R^*.

Замечание: $q_i R^* q_j \Leftrightarrow$ существует маршрут из q_i в q_j по ε-переходам.

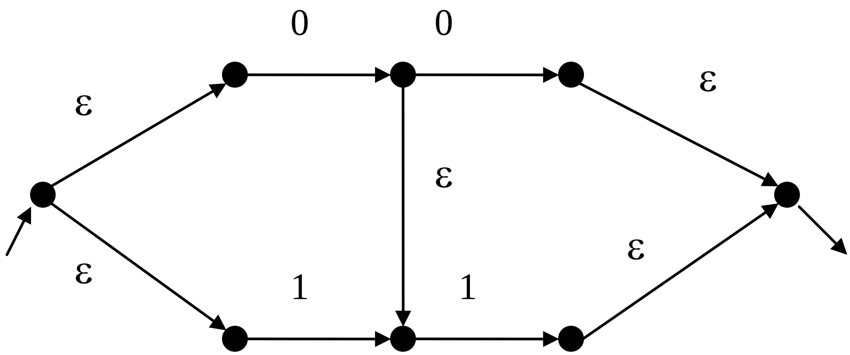
Назовем замыканием состояния q множество $Clo(q) = \{q_j \mid qR^* q_j\}$.
Назовем замыканием множества P состояний автомата –
$$Clo(P) = \bigcup_{q \in P} Clo(q).$$

Построим НКА (Q, Σ, δ', Q_0, q_f), имеющий несколько начальных состояний, собранных в множество Q_0.
$$Q_0 = Clo(q_0).$$
$$\delta'(q, a) = \bigcup_{r \in Clo(q)} Clo(\delta(r, a)).$$

Автомат эквивалентен исходному.

При построении ДКА начальным состоянием берем множество Q_0.

Пример.



§6. Теорема о замкнутости класса автоматных языков. Следствие

Обозначим $\Omega_{\text{авт}}$ класс всех языков над фиксированным алфавитом Σ, допускаемых конечными автоматами.

Проблема – дать характеристику класса $\Omega_{\text{авт}}$, относительно операций над языками.

Теорема.

Класс $\Omega_{\text{авт}}$ замкнут относительно операций пересечения, объединения, дополнения, произведения, итерации.

Теорема.

Класс $\Omega_{\text{авт}}$ замкнут относительно операций пересечения, объединения, дополнения, произведения, итерации.

Доказательство:

Пусть $L(A_1)$ – язык, допускаемый ДКА $A_1 = (Q_1, \Sigma, \varphi_1, q_{01}, Q_{f1})$, $L(A_2)$ – язык, допускаемый ДКА $A_2 = (Q_2, \Sigma, \varphi_2, q_{02}, Q_{f2})$, и $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Очевидно, $L(A_1) \in \Omega_{\text{авт}}$, $L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

1. Покажем, что $L(A_1) \cup L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

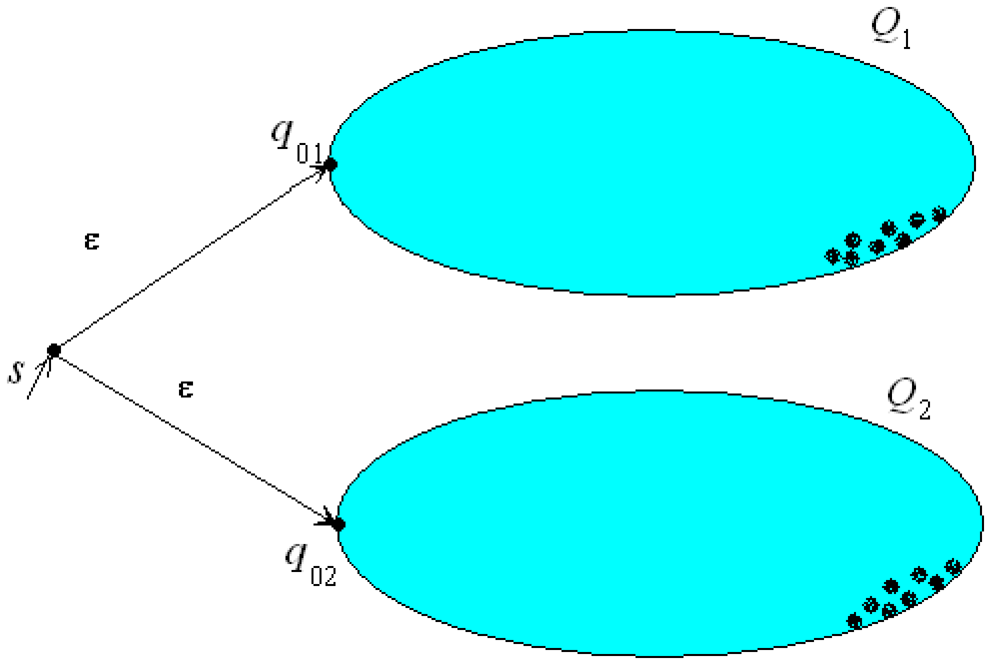
1. Покажем, что $L(A_1) \cup L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

Построим ε-НКА $B = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}, \Sigma, \delta, s, Q_{f3})$, где $s \notin Q_1 \cup Q_2$,

$$Q_{f3} = \begin{cases} Q_{f1} \cup Q_{f2}, \text{ если } \varepsilon \notin L(A_1) \cup L(A_2) \\ \{s\} \cup Q_{f1} \cup Q_{f2}, \text{ если } \varepsilon \in L(A_1) \cup L(A_2) \end{cases}.$$

$\delta(q, x) = \varphi_1(q, x)$ или $\varphi_2(q, x)$, для $q \in Q_1 \cup Q_2$;

$\delta(s, \varepsilon) = \{q_{01} \cup q_{02}\}$.



Q_1
q_{01}
ε
s
ε
Q_2
q_{02}

$$L(B) = L(A_1) \cup L(A_2) .$$

По теоремам из §4 и §5, существует ДКА, допускающий тот же язык.

2. Покажем, что $\overline{L(A_1)} \in \Omega_{\text{авт}}$.

Построим ДКА $B = (Q_1, \Sigma, \varphi_1, q_{01}, Q_1 \setminus Q_{f1})$.

Рассмотрев любое слово w автомат переходит в какое-нибудь состояние q.
Если $w \in L(A_1)$, т.е. $w \notin L(B)$, то $q \in Q_{f1}$, т.е. не является заключительным в автомате B.
И наоборот, если $w \notin L(A_1)$, т.е. $w \in L(B)$, то $q \notin Q_{f1}$, т.е. является заключительным в автомате B.

Следовательно, $L(B) = \overline{L(A_1)}$.

3. $L(A_1) \cap L(A_2) = \overline{(\overline{L(A_1)} \cup \overline{L(A_2)})}$.

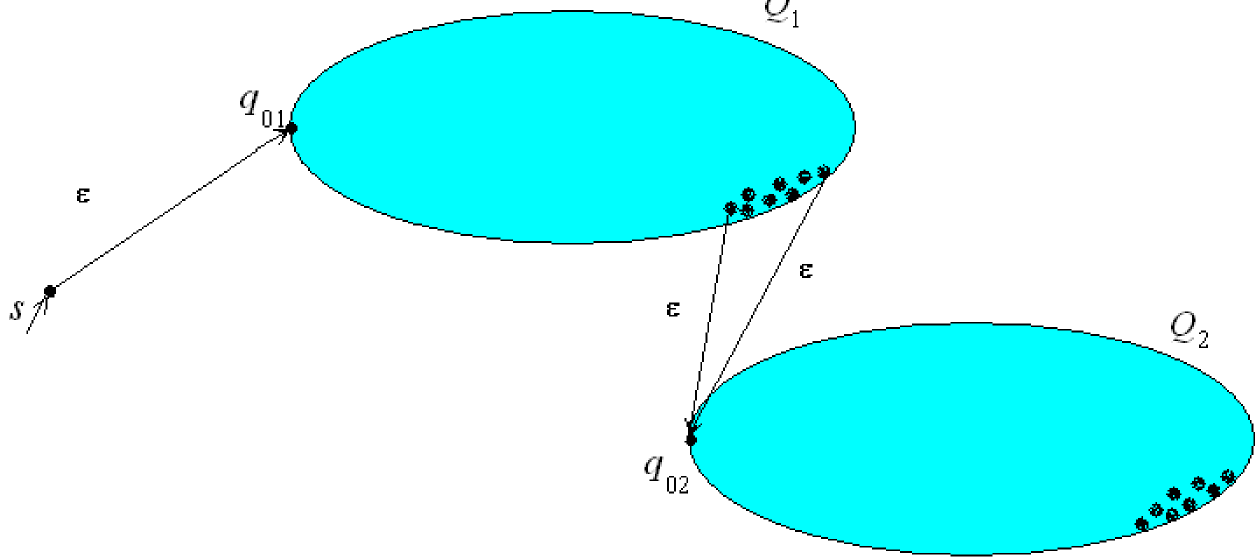
4. Покажем, что $L(A_1) \cdot L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

Построим ε-НКА $B = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}, \Sigma, \delta, s, Q_{f2})$, где $s \notin Q_1 \cup Q_2$,

$\delta(s, \varepsilon) = q_{01}$;

$\delta(q, x) = \varphi_2(q, x)$, для $q \in Q_2$;

$\delta(q, x) = \varphi_1(q, x)$, для $q \in Q_1$;
$\delta(q, \varepsilon) = q_{02}$, для $q \in Q_{f1}$.



Q_1
q_{01}
ε
s
ε
ε
Q_2
q_{02}

Если $\varepsilon \in L(A_1)$, то появится ε-переход $\delta(q_{01}, \varepsilon) = q_{02}$.

$L(B) = L(A_1) \cdot L(A_2)$.

По теоремам из §4 и §5, существует ДКА, допускающий тот же язык.

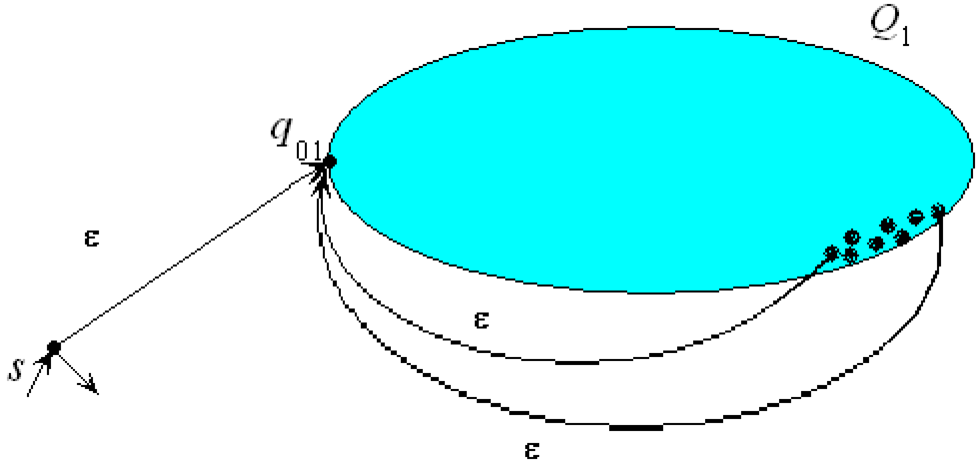
5. Покажем, что $\left(L(A_1)\right)^* \in \Omega_{\text{авт}}$.

Построим НКА $B = (Q_1 \cup \{s\}, \Sigma, \delta, s, Q_{f1} \cup \{s\})$, где $s \notin Q_1$,

$\delta(s, \varepsilon) = q_{01}$;

$\delta(q, x) = \varphi_1(q, x)$;

$\delta(q, \varepsilon) = q_{01}$, для $q \in Q_{f1}$.



$$L(B) = \left(L(A_1)\right)^* .$$

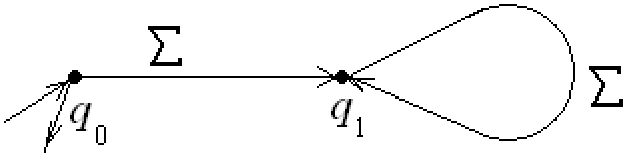
По теоремам из §4 и §5, существует ДКА, допускающий тот же язык.

Следствие.
Любой конечный язык допускается конечным автоматом.

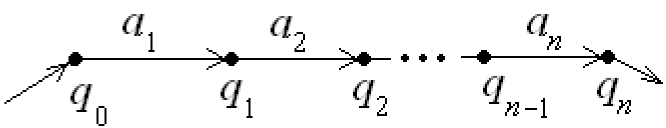
Доказательство:
Конечный язык – конечное множество слов конечной длины.

1. Если язык пустой (т.е. пустое множество), то он допускается любым ДКА с пустым множеством Q_f заключительных состояний.

2. Если язык состоит из одного пустого слова, то он допускается ДКА $A = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \varphi, q_0, \{q_0\})$, где $\varphi(q_0, x) = q_1$, $\varphi(q_1, x) = q_1$.



3. Если язык состоит из одного непустого слова $w = a_1 \ldots a_n$, то он допускается НКА $A = (\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \varphi, q_0, \{q_n\})$, где $\varphi(q_0, a_1) = q_1$, …, $\varphi(q_{n-1}, a_n) = q_n$.



По теореме из §4, существует ДКА, допускающий тот же язык.

4. Если язык $L = \{w_1, \ldots w_m\}$, то $L = \{w_1\} \cup \ldots \cup \{w_m\}$.

Каждый язык $\{w_i\}$ допускается ДКА.

Объединение языков допускается автоматом, упоминавшимся в доказательстве теоремы о замкнутости.