

§11. Моноид переходов автомата. Распознавание языков моноидами, критерий регулярности. Синтаксический моноид языка.

Опр. Пусть  $A$  – ДКА  $(Q, \Sigma, \varphi, q_0, Q_F)$ . Моноидом переходов автомата  $A$  называется  $M(A) = \{ f_w : Q \rightarrow Q \mid \varphi(q, w) = f_w(q) \}$ , где

$\varphi(q, w)$  – короткое обозначение результата перехода ДКА из состояния  $q$  по слову  $w$ .

Замечание:  $M(A)$  является подмножеством симметрической полугруппы на  $Q$ .

Пример. Автомат для продажи кофе, где монета 5 соответствует символу  $a$ , монета 10 соответствует символу  $b$ .

	$a$	$b$	заключ.
0	1	2	0
1	2	2	0
2	1	2	1

Запишем в таблицу результаты переходов ДКА по словам

	$\varepsilon$	$a$	$b$	$aa$	$bb = b$	$ab = b$	$ba$	$aaa = a$	...
0	0	1	2	2	2	2	1	1	
1	1	2	2	1	2	2	1	2	
2	2	1	2	2	2	2	1	1	

$$M(A) = \{ f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba}, \dots \}$$

$$M(A) = \{ f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba}, \dots \}$$


---

Составим таблицу Кэли для функций  $f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba}$  с операцией суперпозиция:

*	$f_\varepsilon$	$f_a$	$f_b$	$f_{aa}$	$f_{ba}$
$f_\varepsilon$	$f_\varepsilon$	$f_a$	$f_b$	$f_{aa}$	$f_{ba}$
$f_a$	$f_a$	$f_{aa}$	$f_b$	$f_a$	$f_{ba}$
$f_b$	$f_a$	$f_{ba}$	$f_b$	?	$f_{ba}$
$f_{aa}$	$f_{aa}$	$f_a$	$f_b$	?	$f_{ba}$
$f_{ba}$	$f_{ba}$	?	$f_b$	?	$f_{ba}$

*	$f_\varepsilon$	$f_a$	$f_b$	$f_{aa}$	$f_{ba}$
$f_\varepsilon$	$f_\varepsilon$	$f_a$	$f_b$	$f_{aa}$	$f_{ba}$
$f_a$	$f_a$	$f_{aa}$	$f_b$	$f_a$	$f_{ba}$
$f_b$	$f_a$	$f_{ba}$	$f_b$	$f_b$	$f_{ba}$
$f_{aa}$	$f_{aa}$	$f_a$	$f_b$	$f_{aa}$	$f_{ba}$
$f_{ba}$	$f_{ba}$	$f_b$	$f_b$	$f_{ba}$	$f_{ba}$

$$f_{ba} * f_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_b;$$

$$f_b * f_{aa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_b;$$

$$f_{aa} * f_{aa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_{aa};$$

$$f_{ba} * f_{aa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_{ba}.$$

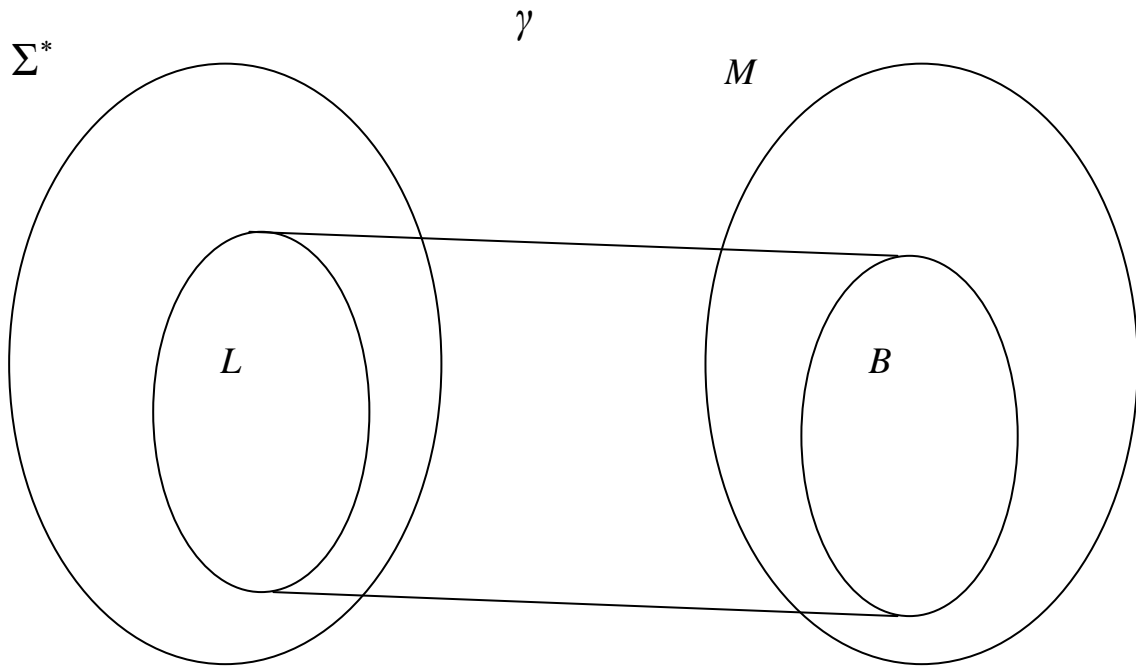
В таблице нет пустых ячеек, следовательно  $\{ f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba} \}$  замкнуто относительно суперпозиции.

$$M(A) = \{ f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba} \}.$$

Замечание: моноид  $M(A)$  порождается функциями  $f_a, f_b$  с обязательным добавлением тождественной функции  $f_\varepsilon$ .

Опр. Гомоморфизмом полугруппы  $(A, \cdot)$  в полугруппу  $(M, \circ)$  называется всюду определенное отображение  $\gamma$  из  $A$  в  $M$ , сохраняющее операцию, т.е.  $\gamma(a \cdot b) = \gamma(a) \circ \gamma(b)$

Опр. Пусть  $(M, \circ)$  – произвольный моноид. Будем говорить, что моноид  $M$  распознает язык  $L$  над алфавитом  $\Sigma$ , если существует гомоморфизм  $\gamma$  из  $(\Sigma^*, \cdot)$  в  $(M, \circ)$  и существует  $B \subseteq M$ :  $L = \gamma^{-1}(B)$  (полный прообраз множества  $B$ ).



Теорема. Язык  $L$  регулярный  $\Leftrightarrow L$  распознается конечным моноидом.

Доказательство:

$\Rightarrow$ ) Дано:  $L$  регулярный.

Опр. Назовем синтаксической конгруэнцией языка  $L$  отношение  $\approx_L$  на  $\Sigma^*$  :  $u \approx_L v \Leftrightarrow \forall x, y \in \Sigma^* : (xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L)$  .

Замечание: конгруэнция – отношение эквивалентности,

сохраняющееся при операции:  $u_1 \approx_L v_1, u_2 \approx_L v_2 \Rightarrow u_1 \cdot u_2 \approx_L v_1 \cdot v_2$  .

Д/З – доказать, что  $\approx_L$  является конгруэнцией на  $(\Sigma^*, \cdot)$  .



Лемма. Язык  $L$  регулярный  $\Rightarrow$  отношение  $\approx_L$  имеет конечный индекс.

Доказательство леммы:

Пусть  $A$  – ДКА  $(Q, \Sigma, \varphi, q_0, Q_F)$ , допускающий  $L$ .

Рассмотрим моноид переходов автомата  $A$

$$M(A) = \{ f_w : Q \rightarrow Q \mid \varphi(q, w) = f_w(q) \}.$$

Определим на  $\Sigma^*$  отношение  $\rho$ :  $u \rho v \Leftrightarrow f_u = f_v$ .

Количество функций в  $M(A)$  не превышает  $|Q|^{|Q|}$ , следовательно, количество классов эквивалентности по  $\rho$  конечно.

Покажем, что  $u \rho v \Rightarrow u \approx_L v$ .

$$u \rho v \Leftrightarrow f_u = f_v \Leftrightarrow \forall x, y : f_{xuy} = f_x * f_u * f_y = f_{xvy} \Leftrightarrow xuy \rho xvy.$$

$$xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L \Rightarrow u \approx_L v.$$

Количество классов эквивалентности по  $\approx_L$  не превышает количества классов по  $\rho$ , следовательно, конечно.

Лемма доказана.

Отношение  $\approx_L$  имеет конечный индекс.

Рассмотрим фактор множество  $M = \Sigma^* / \approx_L$ , состоящее из классов

эквивалентности по отношению  $\approx_L$ . Обозначим  $[u]$  класс, содержащий слово  $u$ . Введем операцию  $\circ$  :

$$[u] \circ [v] = [uv].$$

$(M, \circ)$  – моноид, где нейтральным элементом является  $[\varepsilon]$ .

Определим отображение  $\gamma$  из  $(\Sigma^*, \cdot)$  в  $(M, \circ)$ :  $\forall u \in \Sigma^* \quad \gamma(u) = [u]$ .

Отображение  $\gamma$  всюду определенное и сохраняет операцию, следовательно, является гомоморфизмом из  $(\Sigma^*, \cdot)$  в  $(M, \circ)$ .

Выберем  $B = \gamma(L)$ .

Покажем, что  $L = \gamma^{-1}(B)$ .

(от противного) Предположим,  $w \notin L, \gamma(w) \in B$

$$\Rightarrow \exists u \in L: [w] = [u] \Rightarrow w \approx_L u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon u \varepsilon \in L \leftrightarrow \varepsilon w \varepsilon \in L) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w \in L \text{ – противоречие. Следовательно, } \forall w: \gamma(w) \in B \Rightarrow w \in L.$$

$\Leftrightarrow$ ) Дано:  $L$  распознается конечным моноидом  $(M, \circ)$ . Пусть  $\gamma$  – гомоморфизм из  $(\Sigma^*, \cdot)$  в  $(M, \circ)$ .

Построим ДКА  $A = (M, \Sigma, \varphi, e, B)$ ,  
 $e$  – нейтральный элемент моноида  $M$ ,  
 $\varphi(m, a) = m \circ \gamma(a)$ .

Покажем, что  $L(A) = A$ .

$$\forall w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^* \rightarrow \varphi(e, w) = e \circ \gamma(a_1) \circ \dots \circ \gamma(a_n) = \gamma(w),$$

$$w \in L \Leftrightarrow \gamma(w) \in B \Leftrightarrow w \in L(A).$$

Опр. Синтаксическим моноидом языка  $L$  называется фактор-  
множество  $M = \Sigma^* / \approx_L$ , состоящее из классов эквивалентности по  
отношению  $\approx_L$ , с операцией  $\circ : [u] \circ [v] = [uv]$ .