А. П. Замятин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное
пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

А. П. Замятин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Рекомендовано в качестве учебного пособия
научно-методическим советом по математике и механике
УМО университетов России для математических
специальностей и направлений

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2004

Научный редактор профессор Л. Н. Шеврин

Рецензенты

кафедра прикладной геометрии и автоматизации проектирования Уральского государственного технического университета — УПИ (зав. кафедрой доктор технических наук, профессор Р. А. Вайсбурд);

А. С. Кондратьев, доктор физико-математических наук, профессор (Институт математики и механики УрО РАН)

Замятин А. П.

З-269 Математическая логика: Учеб. пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. – 140 с.

ISBN 5-7996-0191-2

В пособии излагается метод резолюций, значительное внимание уделено анализу выразительных возможностей языка математической логики, содержится теоретический материал, подборка задач, а также ответы и указания к некоторым из них.

Адресовано студентам специальностей «Математика. Компьютерные науки» и «Прикладная информатика», может быть использовано студентами других специальностей, изучающих информатику.

УДК 510.4
ББК Ю4

ISBN 5-7996-0191-2

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение математической логики как самостоятельного раздела математики обычно относят к концу XIX – началу XX века. Это время возникновения кризиса в основаниях математики, связанного с открытием парадоксов, т. е. рассуждений, приводящих к противоречиям.

Математическая логика в течение всего периода развития имела применение как в математике, так и вне ее. Из наиболее значительных применений в математике отметим два. Использование методов математической логики для анализа алгебраических структур привело к возникновению *теории моделей* – области математики, лежащей на стыке алгебры и математической логики. Применение логики в математическом анализе способствовало появлению новой научной дисциплины – *нестандартного анализа*.

Весьма значительны и «нематематические» применения математической логики в кибернетике и информатике. На одном из применений в информатике остановимся подробнее. В последнее время в рамках этой области знания возникло направление, называемое *искусственным интеллектом*, одной из основных задач которого является разработка *моделей представления знаний*. Такая модель должна обладать значительными выразительными средствами – иметь достаточно богатый *язык представления знаний*. Кроме средств описания знаний, модель должна обладать и определенными дедуктивными возможностями, в частности, уметь *получать следствия* из некоторой исходной информации. Этим требованиям в полной мере удовлетворяют логические модели, в основе которых лежит логика предикатов первого порядка – стержня математической логики.

Пособие состоит из четырех глав.

Первая глава посвящена логике высказываний. В ней изучаются основные понятия этой логики, обсуждаются понятия равносильности и логического следствия, приводится список законов логики высказываний, вводятся нормальные формы и излагается применение логики высказываний к контактным схемам.

Во второй главе изучаются булевы функции. В ней приводятся понятия замкнутости и полноты класса функций, вводятся основные замкнутые классы функций, приводятся теорема Поста и некоторые следствия из нее.

Третья глава посвящена логике предикатов первого порядка. В ней, как и в первой главе, после введения основных понятий обсуждаются понятия равносильности и логического следствия и приводится список законов логики первого порядка, вводятся предваренная и сколемовская нормальные формы. На примере транзитивного замыкания демонстрируется способ доказательства невыразимости. Далее, излагается многосортная логика первого порядка, рассматриваются примеры, показывающие значительные выразительные возможности этой логики.

В четвертой главе изучается метод резолюций. В ней вводятся основные понятия метода для логики высказываний, приводится теорема о полноте (для логики высказываний). Изучаются подстановка и унификация и основные понятия метода для логики первого порядка. Вводятся эрбрановский универсум и семантические деревья, приводятся теорема Эрбрана и теорема о полноте (для логики первого порядка). Наконец, обсуждаются стратегии метода, применения для доказательства теорем и решения задачи планирования действий, взаимосвязь метода и логического программирования.

Каждая глава содержит довольно значительную подборку задач, которых достаточно для проведения аудиторных занятий и для самостоятельной работы. К большинству задач даны ответы, ряд задач имеет указания к решению, для некоторых задач приведены решения.

Автор благодарен сотрудникам ИВЦ Уральского университета Козловой Елене Сергеевне и Корюковой Нине Ефимовне за большую помощь при подготовке пособия к изданию.

Глава 1
ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Высказывания и операции над ними

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. Рассмотрим следующие предложения:

A = «Число $\sqrt{2}$ является иррациональным»;

B = «Неверно, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным»;

C = «Число $\sqrt{2}+1$ является иррациональным»;

D = «Если число $\sqrt{2}$ является иррациональным, то число $\sqrt{2}+1$ также является иррациональным»;

E = «Число x является иррациональным»;

F = «Который час?»;

G = «Идите решать задачу к доске!».

Первые четыре предложения являются высказываниями, последние три – не являются ими. Предложения F и G не являются повествовательными, а значение истинности повествовательного предложения E зависит от того, какие значения получит переменная x (в третьей главе подобные предложения будут названы предикатами). Высказывания A, C и D истинны, высказывание B – ложно. Более точно: *значение истинности* высказываний A, C и D *есть истина*, а *значение истинности* высказывания B *есть ложь*. В дальнейшем истину будем обозначать символом *1*, а ложь – символом *0*.

Проанализируем высказывания A – D с точки зрения их «внутреннего строения». Высказывания A и C можно назвать простыми, высказывания B и D – составными, полученными из простых высказываний A и C. Этот пример показывает, что в языке (в данном случае в русском языке) существуют способы построения одних высказываний из других, которые мы будем называть *опе-*

рациями. В естественных языках существует много таких операций. Мы выделим в качестве основных пять операций.

Определение. Пусть X и Y – некоторые высказывания. Тогда высказывание:

1) «X и Y» называется *конъюнкцией* высказываний X и Y; $\wedge$

2) «X или Y» – *дизъюнкцией* высказываний X и Y; $\vee$

3) «не X» – *отрицанием* высказывания X;

4) «если X, то Y» – *импликацией* высказываний X и Y;

5) «X тогда и только тогда, когда Y» называется *эквиваленцией* высказываний X и Y.

Высказывание B из вышеприведенного примера является отрицанием высказывания A, а высказывание D – импликацией высказываний A и C. Введем следующие обозначения для операций: & – конъюнкция, $\vee$ – дизъюнкция, $\neg$ – отрицание, $\rightarrow$ – импликация, $\leftrightarrow$ – эквиваленция. Так, $B = \neg A$, $D = A \rightarrow C$. Символы &, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ называются *связками.*

Зависимость значения истинности новых высказываний от значений истинности исходных высказываний определяется *таблицей истинности связок* (см. табл. 1.1). Напомним, что единица означает, что высказывание истинно, а нуль – ложно.

Таблица 1.1

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$\neg X$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Можно сказать, что табл. 1.1 содержит пять таблиц истинности – по одной для каждой из связок. Эти пять таблиц для удобства объединены в одну.

Прокомментируем таблицы истинности дизъюнкции и импликации. В русском языке союз «или» понимается в двух смыслах: *разделительном* – или то, или другое, но не оба и *соединительном* – или то, или другое, или оба. Как видно из табл. 1.1, союз «или» мы будем понимать в соединительном смысле. Перейдем к импликации. Если дана импликация $X \rightarrow Y$, то высказывание X называется *посылкой* импликации, а Y – *заключением*. Если посылка X импликации ложна, то вся импликация $X \to Y$ истинна (см. третью и четвертую строки табл. 1.1). Это свойство импликации часто формулируют в виде следующего принципа: «из ложного утверждения (имеется в виду X) следует все что угодно (имеется в виду Y)». В силу этого следующее высказывание: «если $2 \cdot 2 = 5$, то π – иррациональное число» является истинным, поскольку оно представляет собой импликацию, посылка которой ложна. Подчеркнем, что при этом не надо искать доказательство или опровержение того, что π – иррациональное число. Аналогично первая и третья строки табл. 1.1 показывают нам, что если заключение Y импликации истинно, то вся импликация $X \to Y$ также истинна. Это свойство импликации тоже формулируют в виде принципа: «истинное утверждение (имеется в виду Y) следует из чего угодно (имеется в виду X)». Из этого принципа сразу следует истинность высказывания «если π – иррациональное число, то $2 \cdot 2 = 4$», поскольку оно представляет собой импликацию с истинным заключением.

§ 2. Формулы логики высказываний, интерпретация

В § 1 высказывания были введены как повествовательные предложения естественного языка, т. е. как лингвистические объекты. Для изучения этих объектов математическими средствами используется понятие формулы логики высказываний. Дадим соответствующие определения.

Определение. *Атомарными формулами логики высказываний* называются выбранные буквы латинского алфавита с индексами и без них, а также символы истины – *1* и лжи – *0*.

В качестве выбранных букв мы будем использовать U, V, W, X, Y, Z.

Определение. *Формулами логики высказываний* называются:

1) атомарные формулы;

2) выражения вида $(F)\&(G)$, $(F)\vee(G)$, $\neg(F)$, $(F)\to(G)$, $(F)\leftrightarrow(G)$, где F и G – формулы логики высказываний.

На первый взгляд, может показаться, что определение содержит «порочный круг»; понятие формулы логики высказываний определяется само через себя. На самом деле, это определение относится к так называемым индуктивным определениям. Такие определения вводят сначала базовые объекты (в нашем случае – атомарные формулы) и способы порождения новых объектов из уже полученных (в нашем случае – операции, введенные в § 1).

Приведем пример. Буквы X, Y, Z – атомарные формулы. В силу первого пункта определения эти буквы являются формулами логики высказываний, а в силу второго формулами являются выражения $(X)\&(Y)$, $((X)\&(Y)) \to (Z)$. Мы видим, что если строго следовать определению, в формуле надо писать много скобок. Это неудобно для восприятия формулы. Чтобы уменьшить количество скобок, условимся, во-первых, атомарные формулы в скобки не заключать, во-вторых, ввести приоритет (силу связывания) для связок. Будем считать, что $\neg$ имеет наивысший приоритет, $\&$ и $\vee$ имеют одинаковый приоритет, который выше, чем у $\to$ и $\leftrightarrow$. Последние две связки имеют одинаковый приоритет. Используя эти соглашения, формулу $((X)\&(Y)) \to (Z)$ можно записать так: $X\&Y \to Z$. Отметим, что поскольку мы не упорядочили $\&$ и $\vee$ по силе связывания, то выражение $X\&Y\vee Z$ не является формулой. Надо в этом выражении поставить скобки, определяющие порядок выполнения операций. Получаются две формулы: $(X\&Y) \vee Z$ и $X \& (Y\vee Z)$.

Аналогичная ситуация возникает и при записи алгебраических выражений. Операция умножения имеет здесь более высокий приоритет, нежели операция сложения, поэтому в выражении $a+(b*c)$ скобки можно не ставить. Есть, однако, и различие. Операции сложения и вычитания при записи алгебраических выражений имеют одинаковый приоритет. Тем не менее в выражении $a+b-c$ скобки можно не ставить, так как предполагается, что операции в этом случае выполняются слева направо. В логике высказываний мы последнего предположения не делаем, поэтому, как отмечалось, в выражении $X\&Y\vee Z$ надо ставить скобки.

В дальнейшем нам понадобится понятие подформулы. Попросту говоря, подформула формулы F – это «слитная» часть, которая сама является формулой. На строгом уровне это понятие вводится следующим образом.

Определение. *Подформулой* атомарной формулы является она сама. *Подформулами* формулы $\neg F$ являются формула $\neg F$ и все ее подформулы. Подформулами формул $F\&G$, $F\vee G$, $F\to G$, $F\leftrightarrow G$ являются они сами и все подформулы формул F и G.

Например, формула $F = X\&Y \to X\vee Z$ имеет шесть подформул: X, Y, Z, $X\&Y$, $X\vee Z$, $X\&Y \to X\vee Z$.

Теперь необходимо соотнести понятие высказывания и формулы. На самом простом уровне формула – это *форма* для получения высказываний. Пусть, например, дана формула $F = X\&Y \to Z$. Поставим вместо X, Y и Z соответственно высказывания: A_1 = «четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом», A_2 = «в четырехугольнике $ABCD$ смежные стороны равны», A_3 = «в четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны», получим высказывание A_4 = «если четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом и его смежные стороны равны, то диагонали перпендикулярны». Это высказывание получилось «по форме» F. Если вместо X, Y и Z подставить другие высказывания, то получим новое высказывание, имеющее ту же «форму».

На строгом уровне сказанное в предыдущем абзаце оформляется в виде понятия интерпретации.

Обозначим через $\boldsymbol{A}$ множество атомарных, а через $\boldsymbol{F}$ – множество всех формул логики высказываний. Зафиксируем некоторую совокупность высказываний P, удовлетворяющую следующим условиям:

1) какие бы два высказывания из P мы ни взяли, P содержит их конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию;

2) P содержит отрицание каждого из высказываний, принадлежащих P.

Интерпретацией в широком смысле мы будем называть функцию

$$\varphi: \boldsymbol{A} \to P$$

такую, что $\varphi(1)$ – истинное высказывание, а $\varphi(0)$ – ложное. Такая функция, определенная на множестве атомарных формул, естественным образом распространяется на множество всех формул. Выше был приведен пример интерпретации в широком смысле. В этом примере совокупность P содержала высказывания $A_1 - A_4$, а интерпретация φ на атомарных формулах X, Y, Z действовала так: $\varphi(X) = A_1$, $\varphi(Y) = A_2$, $\varphi(Z) = A_3$. Естественное расширение φ на множество всех формул будем обозначать той же буквой. Тогда $\varphi(F) = A_4$.

В дальнейшем от высказываний $\varphi(F)$ нам на самом деле будут нужны только их истинностные значения 1 и 0. Введем поэтому более узкое понятие интерпретации.

Определение. *Интерпретацией в узком смысле* (или просто *интерпретацией*) называется функция

$$\varphi: A \to \{0, 1\}$$

такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

Используя таблицы истинности связок, интерпретацию можно расширить на множество всех формул. Приведем пример. Пусть $\varphi(X) = 1$, $\varphi(Y) = 0$, $\varphi(Z) = 1$, $F = X \vee Y \to Z$, $G = X \& Y \leftrightarrow X \& Z$. Тогда $\varphi(F) = 1$, $\varphi(G) = 0$.

В заключение параграфа рассмотрим задачу, решение которой состоит в использовании выразительных возможностей логики высказываний. Рассмотрим следующее рассуждение (которое для последующих ссылок будем называть рассуждением молодого человека): «Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу назначенное свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу работу, то я начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следовательно, если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я получу эту работу». Задача состоит в том, чтобы перевести это рассуждение на язык логики высказываний, т. е. представить его в виде последовательности четырех формул (поскольку рассуждение содержит четыре предложения).

Обозначим высказывание «я поеду автобусом» буквой X, «автобус опоздает» – буквой Y, «я пропущу свидание» – Z, «я начну огорчаться» – U, «мне следует ехать домой» – V, «я получу работу» – W. Тогда приведенные в рассуждении предложения можно записать в виде следующих формул: $X \& Y \to Z$, $Z \& U \to \neg V$, $\neg W \to U \& V$, $X \& Y \to W$. Мы перевели рассуждение молодого человека на язык логики высказываний.

§ 3. Равносильность и законы логики высказываний

Нетрудно привести примеры формул, которые «выражают одно и то же». Таковы, например, формулы $X \vee Y$ и $Y \vee X$. Подобные формулы мы будем называть *равносильными*. Прежде чем дать соответствующее определение, условимся о следующем обозначении. Если формула F построена из атомарных формул $X_1, \ldots, X_n$, то F будем обозначать через $F(X_1, \ldots, X_n)$. Более того, мы будем пользоваться последним обозначением, даже если некоторые из атомарных формул отсутствуют в записи формулы F (но всякая атомарная формула, входящая в F, содержится среди $X_1, \ldots, X_n$).

Определение. Формулы F и G называются *равносильными*, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = \varphi(G)$.

Убедимся в том, что формулы $F = X \to Y$ и $G = \neg X \vee Y$ равносильны. Из соответствующих определений следует, что если интерпретации φ и ψ совпадают на X и Y, то $\varphi(F) = \psi(F)$ и $\varphi(G) = \psi(G)$. Следовательно, для проверки равенства $\varphi(F) = \varphi(G)$ из определения равносильности надо рассмотреть лишь интерпретации, которые различаются на X и Y (а таких интерпретаций четыре), и вычислить соответствующие значения $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$. Другими словами, надо составить совместную таблицу истинности формул F и G (см. табл. 1.2).

В табл. 1.2 для удобства вычисления значения интерпретаций на G введен промежуточный столбец $\neg X$. Мы видим, что столбцы формул F и G совпадают. Это означает, что формулы F и G равносильны.

Таблица 1.2

X	Y	$F = X \to Y$	$\neg X$	$G = \neg X \vee Y$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Близким к понятию равносильности является понятие тождественной истинности.

Определение. Формула F называется *тождественно истинной*, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = 1$.

Например, формула $F = X\&Y \to X$ является тождественно истинной. Для проверки равенства $\varphi(F) = 1$ не надо рассматривать все интерпретации, а достаточно рассмотреть лишь четыре, которые различаются на атомарных формулах X и Y. Для таких интерпретаций надо вычислить значение формулы F, т. е. составить ее таблицу истинности (см. табл. 1.3). Табл. 1.3 для удобства вычисления значения $\varphi(F)$ содержит промежуточный столбец $X\&Y$.

Мы видим, что столбец формулы F состоит из одних единиц. Это означает, что формула F тождественно истинна.

Таблица 1.3

X	Y	$X\&Y$	$F = X\&Y \to X$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Теорема 1.1. Формулы F и G равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тождественно истинной.

Доказательство. Предположим, что формулы F и G равносильны и рассмотрим интерпретацию φ. Ясно, что $\varphi(F \leftrightarrow G) = \varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G)$. Поскольку значения истинности $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$ совпадают, по таблице истинности эквиваленции имеем равенство $\varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G) = 1$. Это означает, что формула $F \leftrightarrow G$ тождественно истинна.

Предположим теперь, что формула $F \leftrightarrow G$ тождественно истинна и рассмотрим интерпретацию φ. Имеем $1 = \varphi(F \leftrightarrow G) = \varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G)$. Но из таблицы истинности эквиваленции следует, что если $\varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G) = 1$, то $\varphi(F) = \varphi(G)$.

Теорема доказана.

В логике высказываний довольно часто приходится проводить преобразования формул, сохраняющие равносильность. Для таких преобразований используются так называемые *законы логики высказываний*. Приведем список этих законов.

Пусть F, G и H – некоторые формулы логики высказываний. Тогда следующие формулы равносильны:

1) $F \& 1$ и F; 2) $F \vee 1$ и 1;

3) $F \& 0$ и 0; 4) $F \vee 0$ и F;

5) $F \& F$ и F; 6) $F \vee F$ и F;

7) $F \& G$ и $G \& F$; 8) $F \vee G$ и $G \vee F$;

9) $F \& (G \& H)$ и $(F \& G) \& H$; 10) $F \vee (G \vee H)$ и $(F \vee G) \vee H$;

11) $F \& (G \vee H)$ и $(F \& G) \vee (F \& H)$;

12) $F \vee (G \& H)$ и $(F \vee G) \& (F \vee H)$;

13) $F \& (F \vee G)$ и F; 14) $F \vee (F \& G)$ и F;

15) $F \& \neg F$ и 0; 16) $F \vee \neg F$ и 1;

17) $\neg(F \& G)$ и $\neg F \vee \neg G$; 18) $\neg(F \vee G)$ и $\neg F \& \neg G$;

19) $\neg\neg F$ и F; 20) $F \to G$ и $\neg F \vee G$;

21) $F \leftrightarrow G$ и $(F \to G) \& (G \to F)$.

Доказательство этих равносильностей легко получается с помощью таблиц истинности. Отметим, что в примере на определение равносильности мы фактически доказали закон 20.

Прокомментируем список законов. Законы 5 и 6 называются *идемпотентностью*, 7 и 8 – *коммутативностью*, 9 и 10 – *ассоциативностью* соответственно конъюнкции и дизъюнкции. Ассоциативность конъюнкции означает, что в конъюнкции трех формул скобки можно ставить как угодно, а следовательно, вообще не ставить. Из этого утверждения следует, что в конъюнкции четырех, пяти и любого конечного числа формул скобки можно ставить как угодно и поэтому вообще не ставить. Аналогичное замечание можно сделать и для дизъюнкции.

Законы 11 и 12 называются *дистрибутивностями*. Более точно, закон 11 – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции, а закон 12 – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции. Для применения этих законов в преобразованиях формул удобно иметь в виду следующий аналог. Заменим в законе 11 формулы F, G и H соответственно буквами a, b и c, знак & заменим умножением *, а знак $\vee$ – сложением +. Мы получим известное числовое тождество

$$a*(b+c) = a*b+a*c.$$

Это тождество есть дистрибутивность умножения чисел относительно сложения. В школе применение этого равенства слева направо называется раскрытием скобок, а справа налево – вынесением общего множителя. Отличие операций над высказываниями & и $\vee$ от числовых операций * и + состоит в том, что для высказываний выполняются обе дистрибутивности, а для чисел – только одна. Сложение не является дистрибутивным относительно умножения.

Закон 15 называется *законом противоречия*, закон 16 – *законом исключенного третьего*, закон 19 – *снятием двойного отрицания*. Законы 13 и 14 называются *законами поглощения*, а законы 17 и 18 – *законами де Моргана* в честь известного французского математика и логика XIX века.

Имея законы логики высказываний, мы наряду с построением совместной таблицы истинности получаем еще один способ доказательства равносильности двух формул. Этот способ состоит в переходе от одной формулы к другой с помощью законов. В его основе лежит следующее легко доказываемое утверждение: если в некоторой формуле F заменить подформулу G равносильной ей формулой G', то получим формулу F', равносильную исходной формуле F.

Проиллюстрируем второй способ на следующем примере: доказать равносильность формул

$$F = [X \& (Z \to Y)] \vee [(X \to Z) \& Y] \quad \text{и}$$
$$G = (X \vee Y) \& (Y \vee \neg Z).$$

В силу закона 20 формулы $Z \to Y$ и $X \to Z$ равносильны соответственно формулам $\neg Z \vee Y$ и $\neg X \vee Z$, поэтому формула F равносильна формуле

$$F_1 = [X \& (\neg Z \vee Y)] \vee [(\neg X \vee Z) \& Y].$$

Дважды применив дистрибутивность (закон 11) и пользуясь ассоциативностью связок & и $\vee$, получим, что формула F_1 равносильна формуле

$$F_2 = (X \vee \neg X \vee Z) \& (\neg Z \vee Y \vee \neg X \vee Z) \& (X \vee Y) \& (\neg Z \vee Y \vee Y).$$

В силу коммутативности дизъюнкции законов 16 и 2, формулы $X \vee \neg X \vee Z$ и $\neg Z \vee Y \vee \neg X \vee Z$ равносильны *1*. Применив теперь законы 1 и 6 и коммутативность дизъюнкции, получим, что формула F_2 равносильна G.

§ 4. Логическое следствие

Одна из основных целей изучения логики состоит в получении формального аппарата для доказательства того, является ли данное утверждение следствием других. Введем необходимые понятия.

Определение. Формула G называется *логическим следствием* формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, если для любой интерпретации φ из того, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \ldots = \varphi(F_k) = 1$, следует, что $\varphi(G) = 1$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: выяснить, логично ли рассуждение молодого человека из § 2. Напомним, что это рассуждение мы перевели на язык логики высказываний, т. е. представили в виде последовательности формул: $F_1 = X\&Y \to Z$, $F_2 = Z\&U \to \neg V$, $F_3 = \neg W \to U\&V$, $F_4 = X\&Y \to W$. Это означает, что поставленная задача переходит в следующую задачу: выяснить, будет ли формула F_4 логическим следствием формул F_1, F_2, F_3? Чтобы ответить на этот вопрос, предположим, что при некоторой интерпретации φ формула F_4 принимает значение 0, а формулы F_1, F_2, F_3 – значение 1. Если $\varphi(F_4) = 0$, то $\varphi(X) = \varphi(Y) = 1$ и $\varphi(W) = 0$. Из того, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_3) = 1$, следуют равенства $\varphi(Z) = \varphi(U) = \varphi(V) = 1$. Но это противоречит тому, что $\varphi(F_2) = 1$. Полученное противоречие показывает, что если $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = 1$, то $\varphi(F_4) = 1$, т. е. что формула F_4 является логическим следствием формул F_1, F_2, F_3 и рассуждение молодого человека логично.

Приведем противоположный пример. Докажем, что формула $G = Y \to X$ не является логическим следствием формул $F_1 = X \vee Y$, $F_2 = X \to Y$, $F_3 = Y$. Для этого построим совместную таблицу истинности формул F_1, F_2, F_3 и G (табл. 1.4).

Таблица 1.4

X	Y	$F_1 = X \vee Y$	$F_2 = X \to Y$	$F_3 = Y$	$G = Y \to X$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Мы видим (см. табл. 1.4), что если взять интерпретацию φ, для которой $\varphi(X) = 0$, $\varphi(Y) = 1$, (т. е. взять третью строку табл. 1.4), то $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = 1$, но $\varphi(G) = 0$. Следовательно, формула G не является логическим следствием формул F_1, F_2, F_3.

Понятие логического следствия тесно связано с понятием выполнимости.

Определение. Множество формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_l\}$ называется *выполнимым*, если существует интерпретация φ такая, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \ldots = \varphi(F_l) = 1$.

Проверку выполнимости множества формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_l\}$ можно провести построением совместной таблицы истинности этих формул. Если найдется хотя бы одна строка, в которой в столбцах формул F_1, F_2, ..., F_l стоят единицы, то это множество формул выполнимо. Если такой строки нет, то множество формул невыполнимо. Так, множество формул $\{F_1, F_2, F_3, G\}$ из предыдущего примера выполнимо, поскольку в табл. 1.4 в первой строке в столбцах этих формул стоят единицы.

В главе 4 нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1.2 Формула G является логическим следствием формул F_1, F_2, ..., F_k тогда и только тогда, когда множество формул

$$L = \{F_1, F_2, \ldots, F_k, \neg G\}$$

невыполнимо.

Доказательство. Пусть формула G является следствием множества формул F_1, ..., F_k. Предположим, что множество L выполнимо. Это означает, что существует интерпретация ψ такая, что $\psi(F_1) = \ldots = \psi(F_k) = \psi(\neg G) = 1$. Но если $\psi(F_1) = \ldots = \psi(F_k) = 1$, то $\psi(G) = 1$, поскольку G – логическое следствие формул F_1, ..., F_k. Полученное противоречие $\psi(\neg G) = 1$ и $\psi(G) = 1$ доказывает, что множество формул $\{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}$ невыполнимо.

Пусть теперь множество формул L невыполнимо. Рассмотрим интерпретацию φ такую, что $\varphi(F_1) = \ldots = \varphi(F_k) = 1$. Поскольку L невыполнимо, имеем $\varphi(\neg G) = 0$. Если $\varphi(\neg G) = 0$, то $\varphi(G) = 1$. Следовательно, из равенств $\varphi(F_1) = \ldots = \varphi(F_k) = 1$ следует равенство $\varphi(G) = 1$. Это означает, что G – логическое следствие множества формул F_1, ..., F_k. Теорема доказана.

§ 5. Нормальные формы в логике высказываний

Среди множества формул, равносильных данной, выделяют формулы, имеющие ту или иную нормальную форму. Дадим необходимые определения.

Определение. *Литералом* называется атомарная формула, кроме 1 и 0, или ее отрицание. *Элементарной конъюнкцией* называется литерал или конъюнкция литералов.

Определение. Формула G имеет *дизъюнктивную нормальную форму* (сокращенно ДНФ), если она является элементарной конъюнкцией или дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

Например, формулы X, $\neg Y$, $X\&\neg Y$, $(X\&\neg Y) \vee (\neg X\&Z)$ имеют ДНФ, а формулы $\neg(X\&Y)$, $X\vee Y\vee 1$, $X\to Y$ не имеют.

Теорема 1.3. Для всякой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая дизъюнктивную нормальную форму.

Теорема легко следует из рассмотрения следующего алгоритма, который по данной формуле F выдает одну из формул G, удовлетворяющую условию теоремы.

Прежде чем привести алгоритм, условимся не различать формулы, которые получаются одна из другой применением коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции, т. е. законов 7–10.

Алгоритм приведения к ДНФ

Шаг 1. Используя законы 21 и 20, исключить из исходной формулы эквиваленцию и импликацию.

Шаг 2. С помощью законов 17–19 занести отрицание к атомарным формулам.

Шаг 3. Если формула содержит подформулу вида

$$H_1 \& (H_2 \vee H_3),$$

то заменить ее на равносильную формулу

$$(H_1 \& H_2) \vee (H_1 \& H_3).$$

Применение алгоритма проиллюстрируем на примере формулы

Выполним первый шаг. Для этого, используя закон 21, заменим $X \leftrightarrow Y$ равносильной ей формулой $(X \to Y)$ & $(Y \to X)$. Затем в полученной формуле с помощью закона 20 исключим связку $\to$. Мы получим формулу

$$F_1 = \neg[(\neg X \vee Y) \mathbin{\&} (\neg Y \vee X)] \mathbin{\&} X.$$

Перейдем ко второму шагу. Применение закона 17 приведет к формуле

$$F_2 = [\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)] \mathbin{\&} X.$$

Затем дважды воспользуемся законом 18 и снимем двойное отрицание (закон 19), получим формулу

$$F_3 = [(X \mathbin{\&} \neg Y) \vee (Y \mathbin{\&} \neg X)] \mathbin{\&} X.$$

Шаг 2 выполнен.

Выполнение шага 3 состоит из применения дистрибутивности к формуле F_3. Это дает нам формулу

$$F_4 = (X \mathbin{\&} \neg Y \mathbin{\&} X) \vee (Y \mathbin{\&} \neg X \mathbin{\&} X).$$

Алгоритм на этом завершен. Формула F_4 имеет дизъюнктивную нормальную форму. Но эту формулу можно упростить. Действительно, формула $Y \mathbin{\&} \neg X \mathbin{\&} X$ в силу законов 15 и 3 равносильна 0, а формула $X \mathbin{\&} \neg Y \mathbin{\&} X$ равносильна $X \mathbin{\&} \neg Y$ (закон 5). Следовательно, формула F_4 равносильна формуле

$$F_5 = X \mathbin{\&} \neg Y.$$

Формула F_5, как и F_4, имеет ДНФ и равносильна исходной формуле F.

Рассмотренный пример показывает, что формула F может иметь не одну равносильную ей формулу, имеющую ДНФ. Иногда это обстоятельство является неудобным. Чтобы его исключить, вводится более узкое понятие, нежели ДНФ.

Определение. Формула G имеет *совершенную дизъюнктивную нормальную форму* (сокращенно СДНФ) *относительно атомарных формул* $X_1, \ldots, X_n$, если выполнены следующие условия:

1) $F = F(X_1, \ldots, X_n)$, т. е. в записи формулы участвуют только $X_1, \ldots, X_n$;

2) F имеет дизъюнктивную нормальную форму, т. е. $F = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$, где $C_1, \ldots, C_k$ – элементарные конъюнкции;

3) каждая элементарная конъюнкция содержит один и только один из литералов X_i или $\neg X_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$;

4) F не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Например, формулы X, $\neg X \& Y$, $(\neg X \& Y) \vee (X \& \neg Y)$ имеют СДНФ относительно содержащихся в них атомарных формул. Формулы $\neg(X \& Y)$, $(X \& Y) \vee (\neg X \& Z)$, $(X \& Y \& X)\ \&\ (\neg X \& \neg Y)$, $(X \& Y) \vee (X \& \neg Y) \vee (Y \& X)$ не имеют СДНФ (относительно содержащихся в них атомарных формул). Для первой формулы не выполняется второе условие, для второй и третьей – третье условие, для четвертой формулы не выполняется последнее условие из определения СДНФ.

Теорема 1.4. Для любой выполнимой формулы F существует равносильная ей формула G, имеющая совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Как и теорема 1.3, эта теорема легко следует из соответствующего алгоритма, который по формуле F выдает формулу G, удовлетворяющую требуемому условию.

Алгоритм приведения к СДНФ

Шаги 1–3 – те же, что и в алгоритме приведения к ДНФ.

Шаг 4. Если элементарная конъюнкция C не содержит ни атомарной формулы X_i, ни ее отрицания для некоторого $i = 1, \ldots, n$, то заменить C на две элементарные конъюнкции $(C \& X_i) \vee (C \& \neg X_i)$.

Шаг 5. Если элементарная конъюнкция C содержит два вхождения одного литерала, то одно из них вычеркнуть. Если же C содержит X_i и $\neg X_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$, то вычеркнуть всю элементарную конъюнкцию.

Шаг 6. Если формула содержит одинаковые элементарные конъюнкции, то вычеркнуть одну из них.

Напомним, что «одинаковость» понимается с точностью до коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции.

В качестве примера рассмотрим ту же формулу $F = \neg(X \leftrightarrow Y)\ \&\ X$, что и в примере для предыдущего алгоритма. Как мы видели, выполнение шагов 1–3 приводит к формуле F_4. Эта формула имеет ДНФ, но не имеет СДНФ, поскольку для нее не выполняется третье условие. Если для F_4 выполнить шаг 4, то в первой элементарной конъюнкции будет зачеркнуто одно из вхождений литерала X, а вторая элементарная конъюнкция будет вычеркнута вся. В результате мы получим формулу F_5. Она имеет СДНФ относительно X и Y.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $G = (X\&Y) \vee (X\&\neg Z)$. Эта формула имеет ДНФ, поэтому выполнение алгоритма приведения к СДНФ начинается с шага 4. При выполнении этого шага элементарная конъюнкция $X\&Y$ будет заменена на $(X\&Y\&Z) \vee (X\&Y\&\neg Z)$, а $X\&\neg Z$ – на $(X\&\neg Z\&Y) \vee (X\&\neg Z\&\neg Y)$. В результате получим формулу:

$$G_1 = (X\&Y\&Z) \vee (X\&Y\&\neg Z) \vee (X\&\neg Z\&Y) \vee (X\&\neg Z\&\neg Y).$$

Условия шага 5 для формулы G_1 не выполняются, поэтому этот шаг формулы G_1 не изменяет. Формула G_1 содержит одинаковые элементарные конъюнкции – вторую и третью. При выполнении шестого шага будет зачеркнута одна из них и получится формула

$$G_2 = (X\&Y\&Z) \vee (X\&Y\&\neg Z) \vee (X\&\neg Y\&\neg Z).$$

Это и есть формула, равносильная G и имеющая СДНФ относительно входящих в G атомарных формул.

Ответим на естественно возникающий вопрос о том, зачем в формулировке теоремы 1.4 требуется выполнимость формулы F? Нетрудно доказать, что если формула F невыполнима, т. е. при любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = 0$, то после приведения F к ДНФ каждая элементарная конъюнкция будет содержать хотя бы одну пару противоположных литералов X и $\neg X$. Но в таком случае на шаге 5 все элементарные конъюнкции будут вычеркнуты.

Имеется еще один способ приведения к СДНФ, основанный на построении таблицы истинности исходной формулы. Изложим этот способ на примере формулы

$$F = X_1 \& (X_2 \to X_3).$$

Составим таблицу истинности формулы F (табл. 1.5).

Выделим строки, в которых в столбце F стоит 1. (Хотя бы одна такая строка должна быть, так как формула F выполнима.) Это

Таблица 1.5

X	X_2	X_3	$X_2 \to X_3$	$F = X_1 \& (X_2 \to X_3)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

будут первая, третья и четвертая строки. Каждой из выделенных строк поставим в соответствие элементарную конъюнкцию $X_1^{\alpha 1} X_2^{\alpha 2} X_3^{\alpha 3}$, где $X_i^{\alpha i} = X_i$, если в столбце X_i этой строки стоит 1, и $X_i^{\alpha i} = \neg X_i$, если в столбце X_i этой строки стоит 0, где $i = 1, 2, 3$. Так, первой строке будет поставлена в соответствие элементарная конъюнкция $X_1 \& X_2 \& X_3$, третьей – $X_1 \& \neg X_2 \& X_3$, четвертой – $X_1 \& \neg X_2 \& \neg X_3$. Формула

$$G = (X_1 \& X_2 \& X_3) \vee (X_1 \& \neg X_2 \& X_3) \vee (X_1 \& \neg X_2 \& \neg X_3)$$

имеет СДНФ относительно X_1, X_2, X_3. В то же время G имеет ту же таблицу истинности, что и F. Это означает, что G равносильна F. Следовательно, G – искомая формула.

Из других нормальных форм рассмотрим конъюнктивную нормальную форму. Она получается из ДНФ заменой & на $\vee$ и $\vee$ на &. Дадим точные определения.

Определение. *Элементарной дизъюнкцией* (или *дизъюнктом*) называется литерал или дизъюнкция литералов.

Определение. Формула G имеет *конъюнктивную нормальную форму* (сокращенно КНФ), если она является элементарной дизъюнкцией или конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

Например, формулы X, $\neg Y$, $X \vee \neg Y$, $X \& \neg Y$, $(X \vee \neg Y) \& (X \vee Z)$ имеют КНФ, а формулы $X \to Y$, $\neg(X \vee Y)$, $(X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z)$ не имеют.

Для конъюнктивных нормальных форм справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.3.

Теорема 1.5 Для всякой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая конъюнктивную нормальную форму.

Доказательство теоремы легко следует из анализа алгоритма приведения к КНФ, который в свою очередь получается из алгоритма приведения к ДНФ, если шаг 3 заменить на следующий

Ш а г 3′. Если формула содержит подформулу вида

$$H_1 \vee (H_2 \& H_3),$$

то заменить ее на равносильную ей формулу

$$(H_1 \vee H_2) \& (H_1 \vee H_3).$$

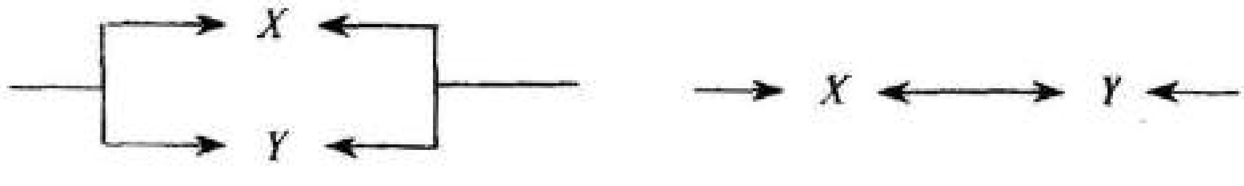
В силу очевидной аналогии между ДНФ и КНФ примеров приведения к КНФ здесь приводить не будем.

§ 6. Контактные схемы

В этом параграфе рассматривается применение логики высказываний к анализу так называемых контактных схем.

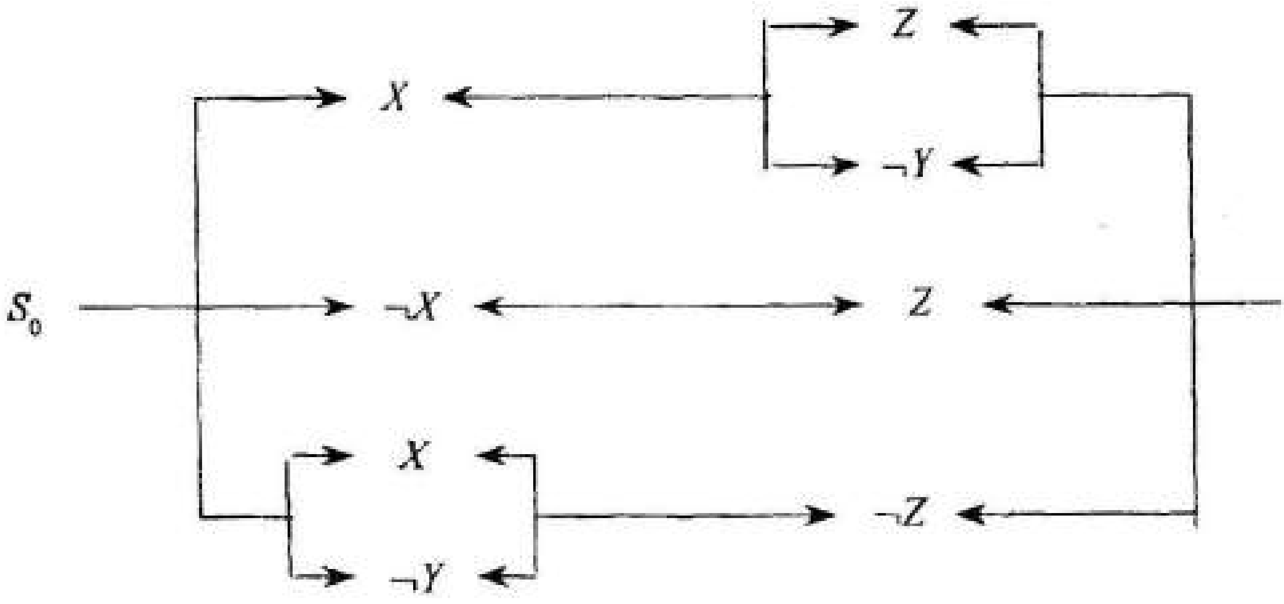
Контактом будем называть устройство, которое в процессе работы может быть в двух состояниях: замкнутом или разомкнутом. Контакт X на чертеже будем изображать следующим образом:

Контакты можно соединять между собой различными способами:



Первое соединение называется *параллельным*, второе – *последовательным*. Контакты, соединенные между собой, будем называть *контактной схемой*. Будем предполагать наличие у схемы двух выделенных точек: входа и выхода. Схему назовем *замкнутой*, если существует последовательность замкнутых контактов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ такая, что X_i соединен с X_{i+1}, X_1 соединен с входом,

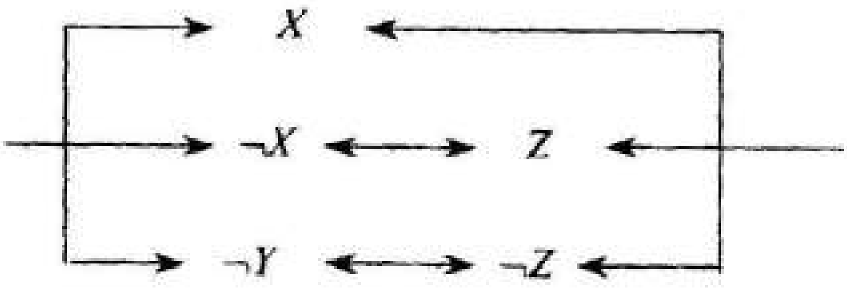
X_n – с выходом. Схему, не являющуюся замкнутой, назовем *разомкнутой*. Каждому контакту поставим в соответствие высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда контакт замкнут. Такие высказывание и контакт будем обозначать одной буквой. Пусть схема S построена из контактов X_1, X_2, ..., X_n с помощью параллельного и последовательного соединений. Тогда по схеме S можно построить формулу логики высказываний F_S так, что параллельному соединению соответствует дизъюнкция, последовательному – конъюнкция. Например, приводимой ниже схеме S_0 соответствует указанная затем формула F_{S0}. (Через $\neg V$ обозначается контакт, который замкнут тогда и только тогда, когда V разомкнут.)



$$F_{S0} = [X \mathbin{\&} (Z \vee \neg Y)] \vee [\neg X \mathbin{\&} Z] \vee [(X \vee \neg Y) \mathbin{\&} \neg Z] .$$

Формула F_S «представляет» схему в следующем смысле: схема S замкнута в том и только в том случае, если F_S принимает значение 1. Контактным схемам соответствуют формулы, в построении которых участвуют лишь связки &, $\vee$, $\neg$, причем отрицание применяется только к атомарным формулам. Нетрудно понять, что по всякой такой формуле F можно восстановить схему, которую формула F «представляет».

Пусть схемам S и T соответствуют формулы F_S и F_T в описанном выше смысле. Тогда если схемы S и T эквивалентны (т. е. замкнуты и разомкнуты одновременно), то F_S и F_T равносильны, и обратно. Этот факт используется для решения задачи минимизации контактных схем, которая состоит в том, чтобы по данной схеме S найти схему T, эквивалентную S и содержащую меньше контактов. Один из путей решения этой задачи состоит в переходе к формуле F_S и в отыскании формулы G, равносильной F_S и содержащей меньше вхождений атомарных формул (разумеется, имеется в виду, что G построена только с помощью &, $\vee$ и $\neg$, причем $\neg$ применяется лишь к атомарным формулам). Так, например, формула F_S равносильна формуле $X \vee (\neg X \& Z) \vee (\neg Y \& \neg Z)$. Следовательно, приведенная выше схема эквивалентна следующей схеме, которая содержит на три контакта меньше:



Заметим, что последнюю формулу можно еще упростить.

Задачи

1. Определить, какая логическая связка используется в следующих словесных выражениях:

«A, если B»; «коль скоро A, то B»; «в случае A имеет место B»; «как A, так и B»; «для A необходимо B»; «для A достаточно B»; «A вместе с B»; «A не имеет места»; «A, только если B»; «A, пока B»; «или A, или B»; «A одновременно с B»; «A – то же самое, что и B».

2. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний.

2.1. Профсоюзы штата будут поддерживать губернатора, если он подпишет этот закон. Фермеры окажут ему поддержку, если он наложит на него вето. Очевидно, что он или не подпишет закон, или не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, или голоса фермеров.

2.2. Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

2.3. Если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на коньках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра, в выходной день, оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

3. Выяснить, будут ли тождественно истинны следующие формулы:

а) $X\&Y \to X$;
б) $X\vee Y \to X$;
в) $X\&Y \to X\vee Y$;
г) $X\vee Y \to X\&Y$;
д) $(X\to Y) \to (Y\to X)$;
е) $(X\to\neg X) \to X$;
ж) $(\neg X\to X) \to X$;
з) $(X\to Y) \to (\neg Y \to \neg X)$;
и) $\neg(X\leftrightarrow Y) \to (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$.

4. Выяснить, существует ли формула F такая, что формула G тождественно истинна:

а) $G = X\&Y \to F\&Z$;
б) $G = (F\&Y \to \neg Z) \to (Z \to \neg Y)$;
в) $G = (F\&Z) \vee (\neg F\&\neg Y\&\neg Z)$.

5. Выяснить, будут ли следующие формулы равносильны:

а) $X\to Y$ и $\neg Y \to \neg X$;
б) $\neg X \to Y$ и $\neg Y \to X$;
в) $X \to (Y\to Z)$ и $(X\to Y) \to Z$;
г) $X \to (Y\to Z)$ и $X\&Y \to Z$;
д) $\neg(X\to Y)$ и $\neg X \to \neg Y$;
е) $X\leftrightarrow Y$ и $\neg X \leftrightarrow \neg Y$.

6. Доказать равносильность формул:

а) $\neg[(X\vee Y) \& (X\&\neg Z)]$ и $X\to Z$;
б) $(X\&\neg Y) \vee \neg(X\&Y)$ и $\neg(X\&Y)$;
в) $\neg[(X\vee\neg Y) \& Y] \& \neg(\neg X\&Y)$ и $\neg Y$;
г) $\neg[(X\&Y) \vee \neg Z]$ и $\neg (Z\to X) \vee \neg(Z\to Y)$;
д) $(X\&Y) \vee (\neg X\&Y) \vee (X\&\neg Y)$ и $X\vee Y$;
е) $(\neg X\&Y\&Z) \vee (\neg X\&\neg Y\&Z) \vee (Y\&Z)$ и $(\neg X\vee Y) \& Z$.

7. Доказать, что формула G является логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_n$:

а) $F_1 = X \to Y \vee Z$, $F_2 = Z \to W$, $F_3 = \neg W$, $G = X \to Y$;

б) $F_1 = X \vee Y \vee \neg Z$, $F_2 = X \to X_1$, $F_3 = Y \to Y_1$, $F_4 = Z$, $G = X_1 \vee Y_1$;

в) $F_1 = X \to Y \& Z$, $F_2 = Y \to Z_1 \vee Z_2$, $F_3 = Z \to Z_1$, $F_4 = \neg Z_1$, $G = X \to Z_2$;

г) $F_1 = Z \to Z_1$, $F_2 = Z_1 \to Y$, $F_3 = X \to Y \vee Z$, $G = X \to Y$.

8. Доказать, что формула G не является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$:

а) $F_1 = X \to Y \vee Z$, $F_2 = Y \to W$, $F_3 = Z \to X$, $G = X \to W$;

б) $F_1 = X \to Y$, $F_2 = Y \to Z$, $F_3 = Z \to Z_1 \vee Z_2$, $G = X \to Z_1$;

в) $F_1 = X \vee Y \vee Z$, $F_2 = X \to X_1$, $F_3 = Y \to X_1 \vee Y_1$, $F_4 = \neg Y_1$, $G = Z \to X_1$.

9. Логичны ли рассуждения из задач 2.1, 2.2, 2.3?

10. Логичны ли следующие рассуждения?

10.1. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит был убийцей.

10.2. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

10.3. Намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся.

10.4. Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.

11. Привести формулы к ДНФ:

а) $(X \to Y)\ \&\ (Y \to X)$; б) $\neg[(X \to Y)\ \&\ (Y \to X)]$;

в) $\neg(X \vee Z)\ \&\ (X \to Y)$; г) $\neg(X\&Y \to X)$.

12. Привести формулы к СДНФ:

а) $X \vee (Y\&Z)$; б) $(X \to Y)\ \&\ (Y \to X)$;

в) $\neg(X \vee Y)\ \&\ (X \to Z)$; г) $X\&Y \to \neg\,(X \vee Y)$.

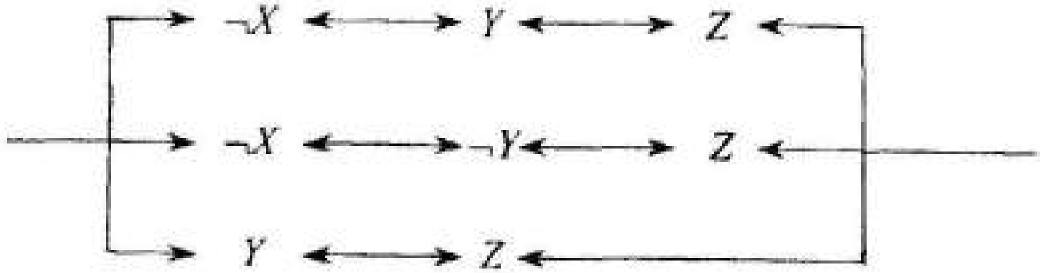
13. Привести формулы к КНФ:

а) $(X \to Y)\ \&\ (Y \to X)$; б) $\neg[(X \to Y)\ \&\ (Y \to X)]$;

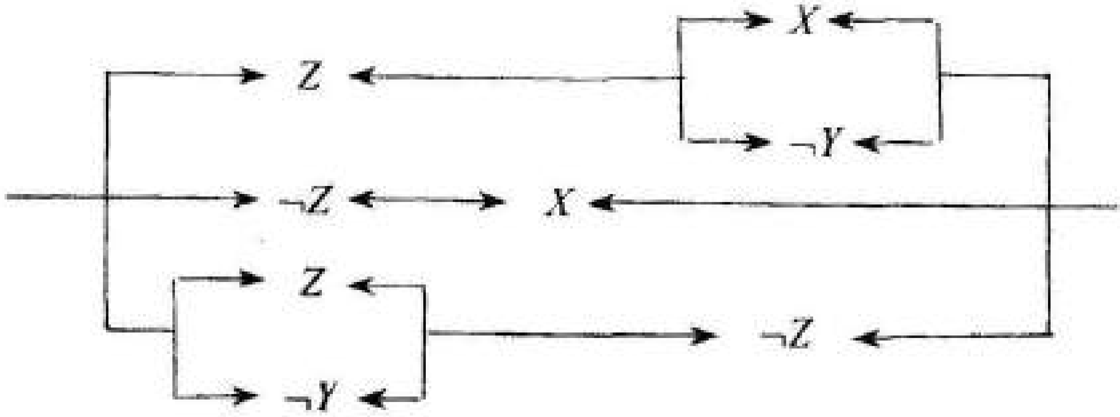
в) $X \vee Y \to X\&Y$; г) $\neg(X\&Y \to X \vee Z)$.

14. Для следующих схем построить эквивалентные им более простые схемы:

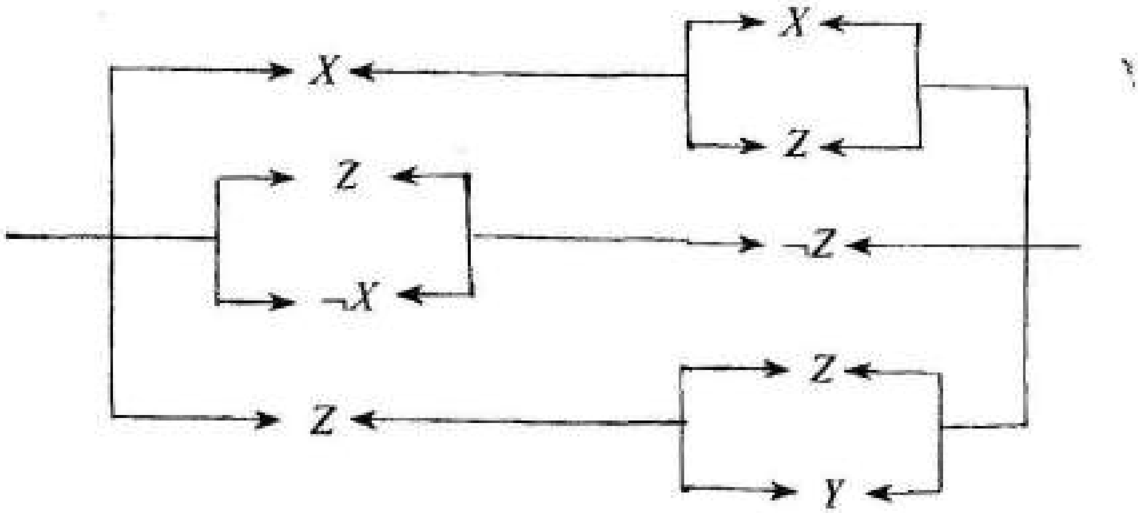
а)



б)



в)



15. Требуется, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных выключателей таким образом, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он был выключен, и выключению, если он был включен. Построить по возможности более простую цепь, удовлетворяющую этому требованию.

16. Пусть каждый из трех членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Построить по возможности более простую цепь, которая была бы замкнута тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют «за».

Ответы, указания и решения

2. Приведем решение задачи 2.1. Рассмотрим высказывания: X = «профсоюзы будут поддерживать губернатора», Y = «губернатор подпишет закон», U = «фермеры окажут губернатору поддержку», V = «губернатор наложит вето». Тогда рассуждение 2.1 представимо формулами $F_1 = Y \to X$, $F_2 = V \to U$, $F_3 = (\neg Y \& V) \vee (Y \& \neg V)$, $G = \neg X \vee \neg U$.

3. Тождественно истинны формулы а), в), ж) и з). Остальные формулы тождественно истинными не являются.

4. В случаях а) и б) ответ положительный, в качестве F можно соответственно взять $X \& Y$ и Y. В случае в) ответ отрицательный. Действительно, если интерпретация φ такова, что $\varphi(Y) = 1$, $\varphi(Z) = 0$, то $\varphi(G) = 0$ независимо от $\varphi(F)$.

5. В случаях а), б) и г) формулы равносильны, в остальных нет.

6. Приведем решение задачи в случае г). Обозначим формулу $\neg[(X \& Y) \vee \neg Z]$ буквой F, а формулу $\neg(Z \to X) \vee \neg(Z \to Y)$ буквой G. Для доказательства равносильности надо из одной формулы с помощью законов логики высказываний получить другую. Применим к формуле F последовательно законы 18 и 17, получим формулу

$$F_1 = (\neg X \vee \neg Y) \& Z.$$

Далее, используя дистрибутивность (закон 11), получим формулу

$$F_2 = (\neg X \& Z) \vee (\neg Y \& Z).$$

Осталось отметить, что формула $\neg X \& Z$ равносильна $\neg(Z \to X)$ (законы 19, 18 и 20), а формула $\neg Y \& Z$ равносильна $\neg(Z \to Y)$. Следовательно, F равносильна G.

7. Приведем решение задачи 7а). Отметим вначале, что логичность следствия можно доказать, построив совместную таблицу истинности формул F_1, F_2, F_3 и G, и убедиться в том, как только все формулы F_1, F_2, F_3 принимают значение 1, то формула G принимает то же значение 1. Однако таблица будет довольно громоздкой, у нее будет 16 строк. Применим другой способ решения задачи. Предположим противное, пусть существует интерпретация φ такая, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = 1$, и $\varphi(G) = 0$. Тогда $\varphi(X) = 1$ и $\varphi(Y) = 0$, поскольку $\varphi(G) = 0$, и $\varphi(W) = 0$, поскольку $\varphi(F_3) = 1$. Далее из равенств $\varphi(F_2) = \varphi(Z \to W) = 1$ и $\varphi(W) = 0$ следует, что $\varphi(Z) = 0$. Но тогда $\varphi(F_1) = \varphi(X \to Y \vee Z) = 0$, что противоречит условию $\varphi(F_1) = 1$. Противоречие показывает, что G есть логическое следствие F_1, F_2, и F_3.

8. Для решения задачи необходимо найти интерпретацию, при которой формулы $F_1, \ldots, F_n$ истинны, а G ложны. Такими интерпретациями являются

а) $\varphi(X) = \varphi(Z) = 1$, $\varphi(Y) = \varphi(W) = 0$;

б) $\varphi(X) = \varphi(Y) = \varphi(Z) = \varphi(Z_2) = 1$, $\varphi(Z_1) = 0$;

в) $\varphi(X) = \varphi(X_1) = \varphi(Y) = \varphi(Y_1) = 0$, $\varphi(Z) = 1$.

9. Рассуждения из задач 2.2 и 2.3 логичны, а из задачи 2.1 – нелогично.

10. Приведем решение задачи 10.1. Рассмотрим высказывания: X = «Джонс не встречал Смита», Y = «Смит был убийцей», Z = «Джонс лжет», U = «убийство произошло после полуночи». Тогда рассуждения можно представить последовательностью формул: $F_1 = X \to Y \vee Z$, $F_2 = \neg Y \to X \& U$, $F_3 = U \to Y \vee Z$, $F_4 = \neg U$, $G = Y$. Пусть существует интерпретация φ такая, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = \varphi(F_4) = 1$, $\varphi(G) = 0$. Тогда из равенств $\varphi(F_4) = 1$ и $\varphi(G) = 0$ следует, что $\varphi(U) = 0$ и $\varphi(Y) = 0$. А если $\varphi(Y) = 0$, то из равенства $\varphi(F_2) = 1$ вытекает, что $\varphi(X) = 1$ и $\varphi(U) = 1$. Противоречие: $\varphi(U) = 0$ и $\varphi(U) = 1$. Это означает, что G является логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_4$ и, следовательно, рассуждение логично.

Рассуждения из задач 10.2–10.4 нелогичны.

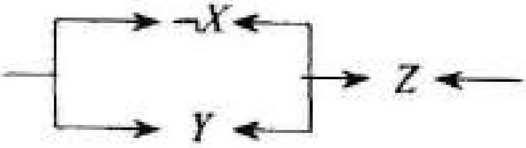
11. Указание. Применить алгоритм приведения к ДНФ.

12. Указание. Применить алгоритм приведения к СДНФ.

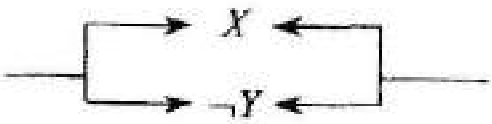
13. Указание. Применить алгоритм приведения к КНФ.

14. Эквивалентные простые схемы приведены на следующих рисунках:

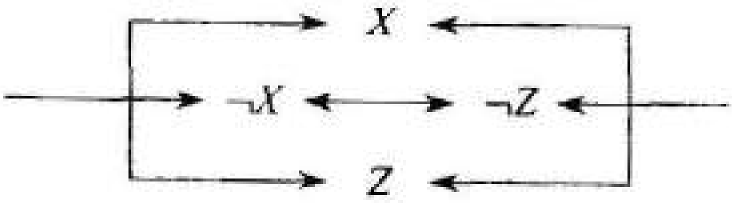
а)



б)



в)



15. Приведем решение задачи. Рассмотрим формулу $F(X, Y, Z)$, имеющую следующую таблицу истинности (табл. 1.6). Атомарные формулы X, Y и Z обозначают выключатели. Заметим, что в таблице истинности значения атомарных формул X, Y и Z в каждой следующей строке отличаются от предыдущей только для од-

Таблица 1.6

X	Y	Z	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

ной из атомарных формул, а значение формулы F меняется на противоположное. Это отражает требование о том, чтобы при нажатии на любой из выключателей свет выключался, если он был включен, и включался, если он был выключен.

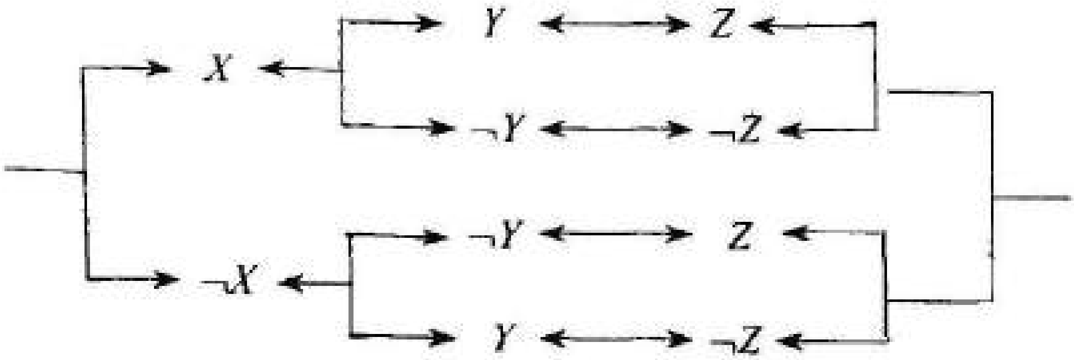
По таблице истинности выпишем формулу F:

$$F = (X\&Y\&Z) \vee (X\&\neg Y\&\neg Z) \vee (\neg X\&\neg Y\&Z) \vee (\neg X\&Y\&\neg Z).$$

Найдем наиболее простую формулу G, равносильную F, в запись которой входят лишь связки $\&$, $\vee$ и $\neg$:

$$G = [X \& ((Y\&Z) \vee (\neg Y\&\neg Z))] \vee [\neg X \& ((\neg Y\&Z) \vee \neg(Y\&\neg Z))].$$

По формуле G построим искомую схему:



Глава 2
БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

В этой главе рассматриваются всюду определенные функции, заданные на множестве $B = \{0, 1\}$. Такие функции называются *булевыми*. Основная цель главы – доказать критерий полноты класса функций – теорему Поста.

§ 1. Замкнутость и полнота

Будем исходить из некоторого множества $\boldsymbol{F}$ функциональных символов. Каждому символу приписано натуральное число – *местность* (или *арность*) символа. Можно считать, что $\boldsymbol{F}$ представляет собой объединение $\boldsymbol{F}_1 \cup \boldsymbol{F}_2 \cup \ldots \boldsymbol{F}_n \cup \ldots$, где $\boldsymbol{F}_n$ – множество символов n-местных функций. Кроме $\boldsymbol{F}$, имеется множество переменных $\boldsymbol{V}$, элементы которого будем обозначать буквами u, v, w, x, y, z с индексами и без них. Каждому n-местному функциональному символу поставлено в соответствие (всюду определенное) отображение

$$\underbrace{B\times \ldots \times B}_{n \text{ раз}}\to B.$$

(При этом разным символам может соответствовать одно и то же отображение.) Это отображение будем обозначать той же буквой, что и символ.

Введем основное понятие.

Определение. *Булевыми функциями* называются выражения одного из следующих видов:

1) $f(v_1, \ldots, v_n)$, где $f\in F_n$, $v_1, \ldots, v_n$ – переменные;
2) $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $f\in F_n$, $t_1, \ldots, t_n$ – булевы функции.

Отметим, что определение относится к тому же типу, что и определение формулы логики высказываний из § 2 предыдущей главы, оно является индуктивным.

Для обозначения двухместных функций наряду с префиксным $f(v_1, v_2)$ мы будем применять и инфиксное $v_1 f v_2$, особенно если речь идет об известных функциях, например, x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$. Условимся также об обозначении некоторых часто встречающихся функций. Эти обозначения содержатся в табл. 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

x	$\theta(x)$	$\iota(x)$	$\varepsilon(x)$	$\nu(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 2.2

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x+y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

(Заметим, что любую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно задать аналогичной таблицей, содержащей 2^n строк.) Функции $\theta(x)$ и $\iota(x)$ называются *константами*, $\varepsilon(x)$ – *тождественной функцией*. Функцию $\nu(x)$ будем иногда называть *отрицанием*. Для функций $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \leftrightarrow y$ сохраним названия, идущие из логики высказываний: *дизъюнкция*, *импликация* и *эквиваленция*. Функции $x \cdot y$ и $x+y$, естественно, *умножение* и *сложение*; умножение можно было бы назвать *конъюнкцией*. Функция $x \mid y$ – *штрих Шеффера*, $x \downarrow y$ – *стрелка Пирса* (или *стрелка Лукасевича*).

В обозначениях функций будем допускать фиктивные переменные. Так, например, функцию x_1+x_2 можно обозначить через $f(x_1, x_2, x_3)$.

Определение. Класс булевых функций K называется *замкнутым относительно переименования аргументов*, если из того, что

n-местная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит K, а $y_1, \ldots, y_n$ – другие переменные (среди которых могут быть и совпавшие), то функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ также принадлежит K.

Например, если K содержит функцию $x+y$ и замкнут относительно переименования аргументов, то K содержит также и функцию $\theta(x)$.

Определение. Класс булевых функций K называется *замкнутым относительно суперпозиции*, если из того, что функции $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат K, следует, что функция

$$f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

также принадлежит K.

Например, если K содержит функции $x \vee y$ и $\nu(x)$ и замкнут относительно суперпозиции (и переименования аргументов), то K содержит и $x \cdot y$, поскольку $x \cdot y = \nu(\nu(x) \vee \nu(y))$.

Определение. Класс булевых функций K называется *замкнутым*, если K:

1) содержит тождественную функцию;
2) замкнут относительно переименования аргументов;
3) замкнут относительно суперпозиции.

Приведем примеры. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *сохраняющей нуль*, если $f(0, \ldots, 0) = 0$. Функции $x \cdot y$, $x \vee y$, $x+y$ сохраняют нуль, а $x \leftrightarrow y$, $x|y$, $x \downarrow y$ не сохраняют. Через T_0 обозначим класс всех функций, сохраняющих 0, т. е.

$$T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | \, f(0, \ldots, 0) = 0\}.$$

Докажем, что класс T_0 замкнут. Функция $\varepsilon(x)$ сохраняет 0, и поэтому $\varepsilon(x) \in T_0$. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет 0 и $y_1, \ldots, y_n$ – новые переменные, то очевидно, что $f(y_1, \ldots, y_n)$ также сохраняет нуль. Это означает, что T_0 замкнут относительно переименования аргументов. Пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняют 0. Тогда

$$f(g_1(0, \ldots, 0), \ldots, g_k(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Это означает, что T_0 замкнут относительно суперпозиции. Мы доказали, что T_0 – замкнутый класс.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *сохраняющей единицу*, если $f(1, \ldots, 1) = 1$. Функции $x \cdot y$, $x \vee y$, $x \to y$ сохраняют единицу, а функции $x + y$, $x | y$, $x \downarrow y$ не сохраняют. Через T_1 обозначим класс всех функций, сохраняющих 1, т. е.

$$T_1 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(1, \ldots, 1) = 1\}.$$

Класс T_1 является замкнутым. Доказательство аналогично приведенному в предыдущем абзаце.

Теорема 2.1. Пересечение непустого семейства $\{K_i | i \in I\}$ замкнутых классов является замкнутым классом.

Доказательство. Пусть $K = \cap\{K_i \mid i \in I\}$. Класс K содержит тождественную функцию, так как все K_i ее содержат. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит K, а $y_1, \ldots, y_n$ – новый набор переменных, то для любого i функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит K_i, поскольку K – пересечение этих классов, и $f(y_1, \ldots, y_n) \in K_i$, поскольку K_i замкнут относительно переименования аргументов. Если функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ принадлежит всем классам K_i, то эта функция принадлежит и их пересечению, т. е. K. Следовательно, K замкнут относительно переименования аргументов.

Предположим, что функции $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат K. Тогда эти функции принадлежат всем классам K_i. Класс K_i замкнут относительно суперпозиции. Следовательно, для любого i класс K_i содержит функцию

$$f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Отсюда следует, что эта функция принадлежит пересечению этих классов – классу K. Мы доказали, что K замкнут относительно суперпозиции.

Теорема доказана.

Определение. *Замыканием* класса K называется пересечение всех замкнутых классов, содержащих K.

Отметим, что для любого класса K существует замкнутый класс, содержащий K, – это класс всех булевых функций.

Замыкание класса K будем обозначать через $[K]$. Из теоремы 2.1 следует, что $[K]$ – замкнутый класс. Отметим ряд простых свойств замыкания.

Теорема 2.2. Пусть K – класс булевых функций. Тогда

1) $K \subseteq [K]$,

2) если $K \subseteq L$, то $[K] \subseteq [L]$,

3) класс K замкнут тогда и только тогда, когда $K = [K]$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{K} = \{K_i \mid i \in J\}$ – семейство (всех) замкнутых классов, содержащих K. Так как K содержится в K_i для любого i, то K содержится и в их пересечении, т. е. в $[K]$.

Предположим, что $\boldsymbol{L} = \{L_j \mid \in J\}$ – семейство замкнутых классов, содержащих L, и что $K \subseteq L$.Тогда $K \subseteq L_j$ для любого j, и поэтому $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{K}$. Отсюда следует, что $\cap\{K_i \mid i \in I\} \subseteq \cap\{L_j \mid j \in J\}$, т. е. что $[K] \subseteq [L]$.

Если K – замкнутый класс, то $K \in \boldsymbol{K}$. Следовательно, $K = \cap\{K_i \mid i \in I\} = [K]$. Если же $K = [K]$, то, как отмечалось выше, $[K]$ – замкнутый класс.

Теорема доказана.

Замыкание класса K можно определить, как класс всех функций, которые получаются из K и тождественной функции с помощью суперпозиции и переименования аргументов.

Пусть $K = \{\theta(x), \iota(x), x+y, x \cdot y\}$. Тогда класс $[K]$ содержит многочлены (от любого числа переменных). Эти многочлены называются *полиномами Жегалкина*. Поскольку произведение элементов множества B удовлетворяет тождеству $u^2 = u$, то полином Жегалкина можно записать в виде $\Sigma a_{i1, \ldots, ik} x_{i1}, \ldots, x_{ik}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $a_{i1, \ldots, ik} \in B$ и суммирование ведется по всем подмножествам множества $\{1, \ldots, n\}$. Например, $1 \cdot x_1 x_2 + 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1$ – полином Жегалкина от двух переменных x_1 и x_2, $a_{12} = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_0 = 1$. Этот полином можно, конечно, записать и так: $x_1 x_2 + x_2 + 1$.

Обозначим через $\boldsymbol{BF}$ класс всех булевых функций.

Определение. Класс функций K называется *полным*, если $[K] = \boldsymbol{BF}$.

Другими словами, класс K полон, если любую булеву функцию можно получить из K (и тождественной функции) с помощью суперпозиции и переименования аргументов.

Теорема 2.3. Следующие классы функций являются полными:

1) $K_1 = \{x \cdot y, x \vee y, \nu(x)\}$,

2) $K_2 = \{x \cdot y, \nu(x)\}$,

3) $K_3 = \{x \vee y, \nu(x)\}$,

4) $K_4 = \{x \cdot y, x+y, \theta(x), \iota(x)\}$.

Доказательство. Докажем, что любая функция может быть получена из функций класса K_1 с помощью суперпозиции и переименования аргументов. Доказательство проведем на примере функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной табл. 2.3.

Таблица 2.3

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Выделим те строки таблицы, где в последнем столбце стоит 1. Это вторая, шестая и седьмая строки. Каждой строке поставим в соответствие произведение переменных или их отрицаний следующим образом. Второй строке поставим в соответствие произведение $\nu(x_1)\cdot\nu(x_2)\cdot x_3$, шестой – $x_1\cdot\nu(x_2)\cdot x_3$, седьмой – $x_1\cdot x_2\cdot\nu(x_3)$, т. е. если переменная x принимает значение 1, то пишем x, если принимает значение 0, то пишем $\nu(x)$. Легко видеть, что функция

$$g(x_1, x_2, x_3) = [\nu(x_1)\cdot\nu(x_2)\cdot x_3] \vee [x_1\cdot\nu(x_2)\cdot x_3] \vee [\, x_1\cdot x_2\cdot\nu(x_3)]$$

задается той же табл. 2.3. Это означает, что $f(x_1, x_2, x_3)$ равно $g(x_1, x_2, x_3)$. Но в записи функции $g(x_1, x_2, x_3)$ использованы только функции из класса K_1. Следовательно, $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть получена из функций класса K_1 суперпозицией и переименованием аргументов, т. е. $f(x_1, x_2, x_3)\in[K]$. (Отметим, что есть прямая аналогия между построением функции $g(x_1, x_2, x_3)$ и приведением к СДНФ, изложенном в конце § 5 главы 1.) На основании этого заключаем, что любая булева функция принадлежит замыканию $[K_1]$. Следовательно, K_1 – полный класс.

Полнота классов K_2 и K_3 получается из полноты класса K_1 с помощью следующего утверждения. Если K – полный класс и любая функция класса K выражается (с помощью суперпозиции и переименования аргументов) через функции класса L, то L – полный класс. Действительно, если любая булева функция выражается через функции класса K, то она будет выражаться и через функции класса L. Мы уже отмечали, что $x \cdot y = \nu(\nu(x) \vee \nu(y))$. Это равенство доказывает полноту класса K_3. Далее справедливо равенство $x \vee y = \nu(\nu(x) \cdot \nu(y))$, из которого следует полнота класса K_2. Полнота класса K_4 следует из полноты класса K_2 и равенства $\nu(x) = x + \iota(x)$. Полнота класса K_4 означает, в частности, что каждая булева функция может быть задана полиномом Жегалкина. Например, $x_1 \to x_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 + 1$, $x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2$.

Теорема доказана.

Связь излагаемого материала с логикой высказываний достаточно очевидна. Тем не менее отметим следующее. Пусть $F(X_1, \ldots, X_n)$ и $G(X_1, \ldots, X_n)$ – формулы логики высказываний. Заменим $\neg X$ на $\nu(X)$, $X \& Y$ – на $X \cdot Y$, большие буквы X_i – на маленькие x_i ($1 \leq i \leq n$). Получим функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда формулы $F(X_1, \ldots, X_n)$ и $G(X_1, \ldots, X_n)$ равносильны в том и только в том случае, когда функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ равны. Это замечание позволит нам при доказательстве равенства функций ссылаться на законы логики высказываний.

§ 2. Самодвойственные функции

Этот и два следующих параграфа посвящены рассмотрению трех конкретных классов функций: самодвойственных, монотонных и линейных.

Определение. Функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ называется *двойственной* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если выполняется равенство

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \nu[f(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n))].$$

Например, $x \cdot y$ двойственна $x \vee y$, и наоборот. Это следует из равенств $x \cdot y = \nu(\nu(x) \vee \nu(y))$ и $x \vee y = \nu(\nu(x) \cdot \nu(y))$, которые мы уже приводили. Функция $x \to y$ двойственна функции $\nu(x)y$, поскольку $\nu(\nu(x) \to \nu(y)) = \nu[\nu(\nu(x)) \vee \nu(y)] = \nu(x \vee \nu(y)) = \nu(x)y$. Отметим, что первое равенство выполняется на основании закона 20, второе – на основании закона 19 и третье – на основании законов 18 и 19.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \nu[f(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n))]. \tag{1}$$

Другими словами, функция самодвойственна, если она совпадает со своей двойственной.

Приведем примеры. Легко видеть, что самодвойственными функциями являются тождественная функция и отрицание: $\nu[\varepsilon(\nu(x))] = \nu[\nu(x)] = x = \varepsilon(x)$, $\nu[\nu(\nu(x))] = \nu(x)$. В то же время произведение $x \cdot y$ самодвойственным не является, поскольку двойственно дизъюнкции $x \vee y$ и $x \cdot y \neq x \vee y$. Можно показать, что никакая функция от двух переменных, существенно зависящая от каждого аргумента, самодвойственной не является. В качестве еще одного примера самодвойственной функции приведем функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_3).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\nu[f(\nu(x_1), \nu(x_2), \nu(x_3)] = \\
&= \nu[(\nu(x_1) \cdot \nu(x_2)) \vee (\nu(x_1) \cdot \nu(x_3)) \vee (\nu(x_2) \cdot \nu(x_3))] = \\
&= \nu[\nu(x_1 \vee x_2) \vee \nu(x_1 \vee x_3)) \vee \nu(x_2 \vee x_3)] = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3) = \\
&= (x_1 \cdot x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_3 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3 \cdot x_3) \vee \\
&\quad \vee (x_2 \cdot x_1 \cdot x_2) \vee (x_2 \cdot x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3 \cdot x_2) \vee (x_2 \cdot x_3 \cdot x_3) = \\
&= (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_3) \vee \\
&\quad \vee (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3) = \\
&= (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3) \vee (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3).
\end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется на основании закона поглощения.

Отметим, что равенство (1) из определения самодвойственности равносильно равенству

$$\nu(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n)). \tag{2}$$

Класс всех самодвойственных функций обозначим буквой S. Убедимся в том, что S – замкнутый класс. Как уже отмечалось,

S содержит $\varepsilon(x)$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ и $y_1, \ldots, y_n$ – новый набор переменных. Тогда, поскольку равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = \nu[f(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n))]$ выполняется для всех значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, $\nu[f(\nu(y_1), \ldots, \nu(y_n))] = f(y_1, \ldots, y_n)$. Следовательно, $f(y_1, \ldots, y_n) \in S$ и S – замкнут относительно переименования аргументов. Возьмем теперь функции $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ из S. Поскольку эти функции принадлежат S, используя равенство (2), получаем, что

$$\begin{aligned}
&\nu(f(x_1, \ldots, x_k)) = f(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n)),\\
&\nu(g_1(x_1, \ldots, x_n)) = g_1(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n)),\\
&\ldots\\
&\nu(g_k(x_1, \ldots, x_n)) = g_k(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n)).
\end{aligned}$$

Тогда, если $h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$, то

$$\begin{aligned}
&h(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n)) =\\
&= f[g_1(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n)), \ldots, g_k(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n))] =\\
&= f[\nu(g_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, \nu(g_k(x_1, \ldots, x_n))] =\\
&= \nu[f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))] =\\
&= \nu(h(x_1, \ldots, x_n)).
\end{aligned}$$

В силу равенства (2) $h(x_1, \ldots, x_n)$ – самодвойственная функция. Следовательно, класс S замкнут относительно суперпозиции.

Следующее утверждение называется *леммой о несамодвойственной функции.*

Лемма. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – несамодвойственная функция. Тогда замыкание класса $K = \{f(x_1, \ldots, x_n), \nu(x)\}$ содержит константы $\theta(x)$ и $\iota(x)$.

Доказательство. Поскольку $f(x_1, \ldots, x_n)$ – несамодвойственная функция, то существуют $a_1, \ldots, a_n \in B$ такие, что

$$\nu[f(a_1, \ldots, a_n)] \neq f(\nu(a_1), \ldots, \nu(a_n)).$$

Множество B содержит только два элемента. Поэтому из этого неравенства следует равенство

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(\nu(a_1), \ldots, \nu(a_n)).$$

Для удобства обозначений предположим, что $a_1, \ldots, a_k = 0$, $a_{k+1}, \ldots, a_n = 1$. Тогда последнее равенство можно записать так:

$$f(0, \ldots, 0; 1, \ldots, 1) = f(1, \ldots, 1; 0, \ldots, 0),$$

где точка с запятой отделяет k-й аргумент от $(k+1)$-го.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x, \dots, x; \nu(x), \dots, \nu(x)).$$

Заметим, что $g(x)$ принадлежит $[K]$. Выполняются равенства

$$g(0) = f(0, \dots, 0; \nu(0), \dots, \nu(0)) = f(0, \dots, 0; 1, \dots, 1) =$$
$$= f(1, \dots, 1; 0, \dots, 0) = f(1, \dots, 1; \nu(1), \dots, \nu(1)) = g(1).$$

Следовательно, $g(x)$ – одна из констант, принадлежащая $[K]$. Поскольку K содержит отрицание, то и другая константа принадлежит $[K]$.

Лемма доказана.

В заключение параграфа рассмотрим пример решения задачи на распознавание самодвойственности: определить, будет ли функция $f(x_1, x_2) = x_2 \cdot (x_2 \to x_1)$ самодвойственной? (Впрочем, мы уже знаем, что $f(x_1, x_2)$ несамодвойственна, но надо это доказать.) Для получения ответа на вопрос составим таблицу, задающую функции $f(x_1, x_2)$ и $\nu(f(\nu(x_1), \nu(x_2))$ (см. табл. 2.4)

Таблица 2.4

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	$\nu(f(\nu(x_1), \nu(x_2))$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Мы видим, что $f(x_1, x_2) \neq \nu(f(\nu(x_1), \nu(x_2))$, например, значения этих функций различаются при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Следовательно, функция $f(x_1, x_2)$ самодвойственной не является. (Для того, чтобы сделать заключение о несамодвойственности, можно было, конечно, прервать составление табл. 2.4 на второй строке.)

§ 3. Монотонные функции

На множество $B = \{0, 1\}$ в этом параграфе будем смотреть, как на частично упорядоченное множество с отношением $0<1$.

Рассмотрим множество

$$B^n = \underbrace{B \times \ldots \times B}_{n \text{ раз}}.$$

На множестве B^n введем порядок прямого произведения:

$$(a_1, \ldots, a_n) \le (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1 \le b_1, \ldots, a_n \le b_n.$$

Например, $(1, 0, 0, 1) \le (1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0) \le (1, 0, 1, 1)$. В то же время неверно, что $(1, 0, 0, 1) \le (1, 0, 1, 0)$.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ из условия $a \le b$ следует $f(a) \le f(b)$.

Примерами монотонных функций являются $\theta(x)$, $\iota(x)$, $x \cdot y$, $x \vee y$. Функции $\nu(x)$, $x \rightarrow y$, $x + y$ немонотонны.

Рассмотрим задачу: выяснить, будет ли функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \cdot x_3$$

монотонной? Для решения этой задачи удобно начертить диаграмму частично упорядоченного множества B^3 и в вершинах этой диаграммы проставить значения функции $f(x_1, x_2, x_3)$. Такая диаграмма приведена на рис. 2.1, значения функции $f(x_1, x_2, x_3)$ заключены в квадрат, чтобы их отличать от обозначения вершин множества B^3.

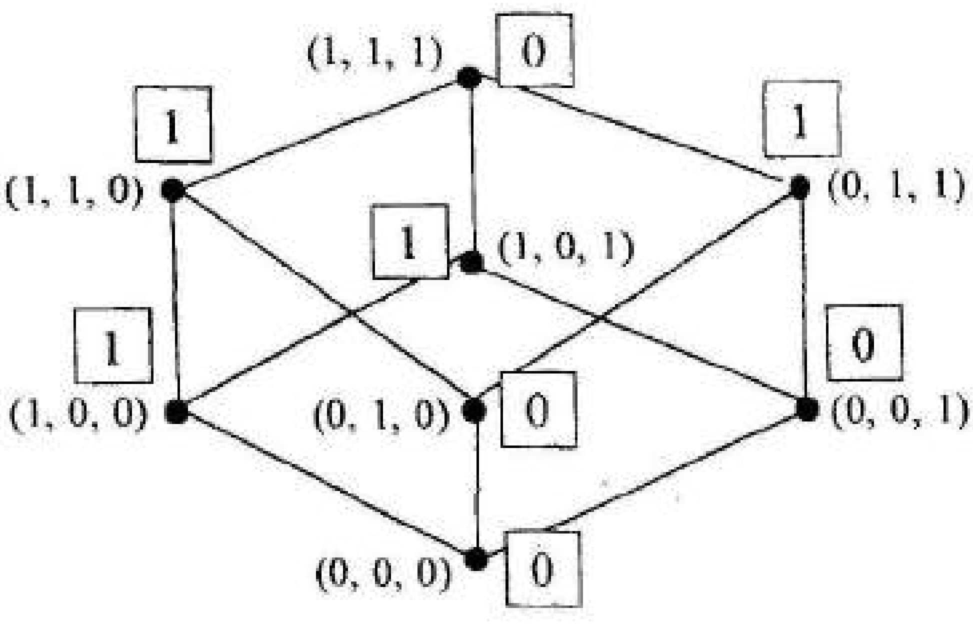


Рис. 2.1

Монотонность функции означает, что если в какой-то вершине диаграммы она принимает значение 1, то и всюду выше функция принимает то же значение 1. Функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1+x_2 \cdot x_3$ монотонной не является, так как в вершине (1, 1, 0) она принимает значение 1, а в вершине (1, 1, 1), которая выше первой, принимает значение 0.

Класс всех монотонных функций обозначим буквой M. Убедимся в том, что M – это замкнутый класс. Монотонность тождественной функции очевидна. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$ и $y_1, \ldots, y_n$ – новые переменные. Возьмем два набора значений переменных $y_1, \ldots, y_n$: $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ таких, что $a \leq b$. Но эти векторы будут наборами значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, и поэтому выполняется неравенство $f(a) \leq f(b)$. Это означает, что M замкнут относительно переименования аргументов.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ – монотонные функции и $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ – два набора значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ таких, что $a \leq b$. Рассмотрим суперпозицию

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Значения функций $g_1(a_1, \ldots, a_n)$, …, $g_k(a_1, \ldots, a_n)$ обозначим соответственно через $c_1, \ldots, c_k$, а значения $g_1(b_1, \ldots, b_n)$, …, $g_k(b_1, \ldots, b_n)$ – через $d_1, \ldots, d_k$. В силу монотонности функций $g_1, \ldots, g_k$ имеем $c_1 \leq d_1, \ldots, c_k \leq d_k$. Тогда $h(a_1, \ldots, a_n) = f(g_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, g_k(a_1, \ldots, a_n)) = f(c_1, \ldots, c_k) \leq f(d_1, \ldots, d_k) = f(g_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, g_k(b_1, \ldots, b_n)) = h(b_1, \ldots, b_n)$. (Знак неравенства поставлен в силу монотонности функции f.) Мы доказали, что класс M замкнут относительно суперпозиции.

Следующее утверждение называется *леммой о немонотонной функции*.

Лемма. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – немонотонная функция. Тогда замыкание класса $K = \{f(x_1, \ldots, x_n), \theta(x), \iota(x)\}$ содержит $\nu(x)$.

Доказательство. Поскольку $f(x_1, \ldots, x_n)$ немонотонна, существуют наборы значений переменных $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ такие, что $a < b$, но $f(a) > f(b)$. Неравенство $f(a) > f(b)$ означает, что $f(a) = 1$ и $f(b) = 0$. Рассмотрим диаграмму частично упорядоченного множества B^n. Так как $a < b$, точка a на диаграмме лежит ниже точки b. Существует восходящая цепь, соединяющая точку a с точкой b (см. рис. 2.2).

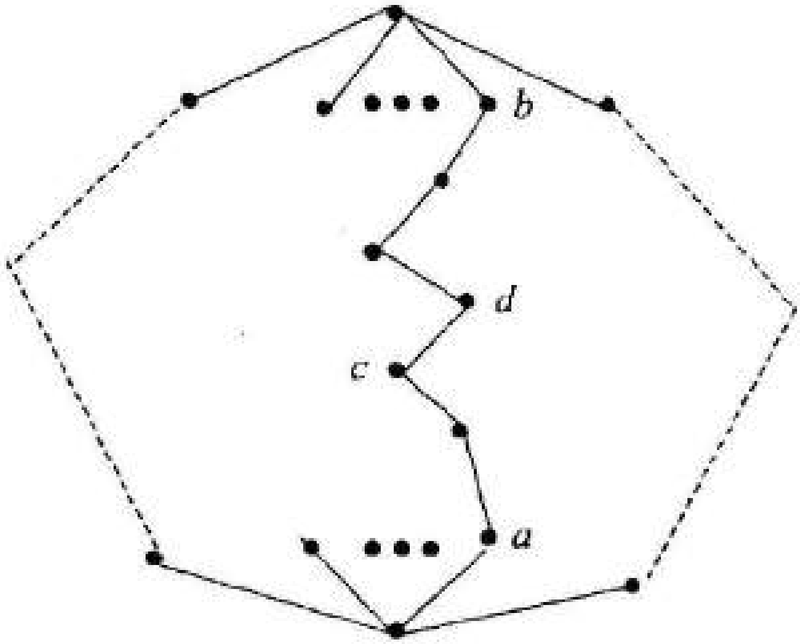


Рис. 2.2

На этой цепи найдутся соседние точки $c = (c_1, \ldots, c_n)$ и $d = (d_1, \ldots, d_n)$ такие, что $c < d$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 0$. Поскольку c и d – соседние точки, то для некоторого i выполняются равенства

$$c = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_n) \text{ и}$$
$$d = (c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_n).$$

Для удобства обозначений будем считать, что $c_1 = \ldots = c_{i-1} = 0$, $c_{i+1} = \ldots c_n = 1$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(\theta(x), \ldots, \theta(x), x; \iota(x), \ldots, \iota(x)),$$

где точка с запятой отделяет i-ю компоненту от $(i+1)$-й. Ясно, что $g(x)$ принадлежит замыканию класса K. Далее,

$$g(0) = f(\theta(0), \ldots, \theta(0), 0; \iota(0), \ldots, \iota(0) =$$
$$= f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 0; c_{i+1}, \ldots, c_n) = f(c) = 1,$$
$$g(1) = f(\theta(1), \ldots, \theta(1), 1; \iota(1), \ldots, \iota(1)) =$$
$$= f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 1; c_{i+1}, \ldots, c_n) = f(d) = 0.$$

Это означает, что $g(x) = \nu(x)$. Лемма доказана.

§ 4. Линейные функции

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если существуют $a_0, a_1, \ldots, a_n \in B$ такие, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n.$$

Примерами линейных функций являются $\theta(x)$, $\iota(x)$, $\nu(x)$, $x+y$. Функции $x \cdot y$, $x \vee y$, $x \to y$ линейными не являются. Докажем, например, нелинейность импликации $f(x, y) = x \to y$. Предположим противное. Пусть $f(x, y)$ – линейная функция. Это означает, что $x \to y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y$ для некоторых $a_0, a_1, a_2 \in B$. Составим таблицу, задающую функции, стоящие в левой и правой частях последнего равенства (см. табл. 2.5).

Таблица 2.5

x	y	$x \to y$	$a_0+a_1 \cdot x+a_2 \cdot y$	Следствие
0	0	1	a_0	$a_0 = 1$
0	1	1	$1+a_2$	$a_2 = 0$
1	0	0	$1+a_1$	$a_1 = 1$
1	1	1	0	Противоречие

Противоречие показывает, что $x \to y$ – нелинейная функция.

Класс всех линейных функций обозначим буквой L. Класс L является замкнутым. Действительно, тождественная функция является линейной. Далее очевидно, что замена аргументов у линейной функции дает линейную и суперпозиция линейных функций линейна.

Следующее утверждение называется *леммой о нелинейной функции*.

Лемма. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – нелинейная функция. Тогда замыкание класса $K = \{f(x_1, \ldots, x_n), \theta(x), \iota(x), \nu(x)\}$ содержит произведение $x \cdot y$.

Доказательство. Как отмечалось в § 1, каждая функция может быть задана полиномом Жегалкина. Это означает, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i1, \ldots, ik}\, x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot \ldots \cdot x_{ik}, \tag{1}$$

где $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $a_{i1, \ldots, ik} \in B$ и суммирование ведется по всем подмножествам множества $\{1, \ldots, n\}$. Так как $f(x_1, \ldots, x_n)$ –

нелинейная функция, то хотя бы одно слагаемое имеет степень, бо́льшую или равную двум. Без ограничения общности можно считать, что это слагаемое содержит произведение $x_1 \cdot x_2$. Слагаемые правой части равенства (1) разделим на 4 группы: содержащие $x_1 \cdot x_2$; содержащие x_1 и не содержащие x_2; не содержащие x_1 и содержащие x_2; не содержащие x_1 и x_2. В первой группе вынесем за скобки $x_1 \cdot x_2$, во второй – x_1, в третьей – x_3, получим, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot f_0(x_3, \ldots, x_n) + x_1 \cdot f_1(x_3, \ldots, x_n) + \\ + x_2 \cdot f_2(x_3, \ldots, x_n) + f_3(x_3, \ldots, x_n).$$

Если $f_0(x_3, \ldots, x_n)$ есть тождественный нуль, то выделим произведение переменных в одном из оставшихся слагаемых и проведем аналогичную группировку. Будем поэтому считать, что существуют элементы $a_3, \ldots, a_n$ из B такие, что $f_0(a_3, \ldots, a_n) = 1$. Пусть $c_1 = f_1(a_3, \ldots, a_n)$, $c_2 = f_2(a_3, \ldots, a_n)$, $c_3 = f_3(a_3, \ldots, a_n)$. Рассмотрим функции

$$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n) = x_1 \cdot x_2 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \text{ и} \\ h(x_1, x_2) = g(x_1 + c_2, x_2 + c_1) + c_1 \cdot c_2 + c_3.$$

Если $c = 1$, то $c \cdot x = x$, $x + c = \vee(x)$; если же $c = 0$, то $c \cdot x = \theta(x)$, $x + c = x$. Отсюда следует, что функции $g(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ принадлежат замыканию класса K. В то же время

$$h(x_1, x_2) = (x_1 + c_2)(x_2 + c_1) + c_1(x_1 + c_2) + c_2(x_2 + c_1) + c_3 + c_1 \cdot c_2 + c_3 = \\ = x_1 \cdot x_2 + c_2 \cdot x_2 + c_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot x_2 + c_1 \cdot c_2 + c_3 + \\ + c_1 \cdot c_2 + c_3 = x_1 x_2,$$

поскольку сложение на множестве B удовлетворяет тождеству $u + u = 0$. Итак, замыкание класса K содержит произведение $x \cdot y$.

Лемма доказана.

§ 5. Критерий полноты

Параграф посвящен доказательству (и обсуждению) критерия полноты класса булевых функций, который называется теоремой Поста.

Определение. Классы T_0, T_1, S, M и L называются *основными замкнутыми классами* функций.

Теорема 2.4. Класс булевых функций K является полным тогда и только тогда, когда он не содержится ни в одном из основных замкнутых классов.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть K – полный класс. Если K содержится в одном из основных замкнутых классов, скажем $K \subseteq T_0$, то $[K] \subseteq [T_0]$. Но $[K]$ – класс всех булевых функций, $[T_0] = T_0$ и, следовательно, любая булева функция сохраняет 0. Противоречие показывает, что K не содержится в T_0. Аналогично доказывается, что K не содержится и в других основных замкнутых классах.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть K не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, M и L. Тогда класс K содержит функции $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n)$, $f_3(x_1, \ldots, x_n)$, $f_4(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_2 \notin S$, $f_3 \notin M$ и $f_4 \notin L$.

Докажем, что $[K]$ содержит $\neg(x)$ и $x \cdot y$. Так как $f_0 \notin T_0$, имеем $f_0(0, \ldots, 0) = 1$. Относительно значения $f_0(1, \ldots, 1)$ рассмотрим два случая.

Случай 1: $f_0(1, \ldots, 1) = 0$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x, \ldots, x)$. Тогда $g(0) = f_0(0, \ldots, 0) = 1$ и $g(1) = f_0(1, \ldots, 1) = 0$, т. е. $g(x) = \neg(x)$. Это означает, что замыкание класса K содержит отрицание. Классу K принадлежит несамодвойственная функция $f_2(x_1, \ldots, x_n)$. По лемме о несамодвойственной функции замыкание класса K содержит константы. Поскольку K содержит нелинейную функцию $f_4(x_1, \ldots, x_n)$, то в силу леммы о нелинейной функции $[K]$ содержит произведение. Мы доказали, что в первом случае $[K]$ содержит $\neg(x)$ и $x \cdot y$.

Случай 2: $f_0(1, \ldots, 1) = 1$. Тогда, если $g(x) = f_0(x, \ldots, x)$ и $h(x) = f_1(g(x), \ldots, g(x))$, то $g(0) = f_0(0, \ldots, 0) = 1 = f_0(1, \ldots, 1) = g(1)$, $h(0) = f_1(g_1(0), \ldots, g_1(0)) = f_1(1, \ldots, 1) = 0 = f_1(g(1), \ldots, g(1)) = h(1)$, поскольку f_1 не сохраняет 1. Это означает, что константы принадлежат $[K]$. Так как K содержит немонотонную функцию, то по лемме о немонотонной функции классу $[K]$ принадлежит отрицание. Далее, f_4 – нелинейная функция из K, поэтому по лемме о нелинейной функции $[K]$ содержит и произведение $x \cdot y$.

Итак, в обоих случаях замыканию $[K]$ принадлежит $\neg(x)$ и $x \cdot y$. Поскольку $\{\neg(x), x \cdot y\}$ – полный класс, то K – также полный класс.

Теорема доказана.

В доказательстве достаточности устанавливается более сильное утверждение: если K не содержится ни в одном из основных замкнутых классов, то в K найдутся пять функций $f_0, \ldots, f_4$ таких, что класс $\{f_0, \ldots, f_4\}$ является полным. На самом деле, внимательное рассмотрение доказательства достаточности позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 2.5. Каждый полный класс содержит полный подкласс, состоящий из не более чем четырех функций.

Доказательство. Пусть K – полный класс. Тогда по теореме 2.4 класс K не содержится ни в одном из основных замкнутых классов. В K найдутся, как и в доказательстве предыдущей теоремы, функции $f_0, \ldots, f_4$. При рассмотрении случая 1 использованы три функции f_0, f_2 и f_4, т. е. в этом случае $\{f_0, f_2, f_4\}$ – полный подкласс класса K. В случае 2 использованы четыре функции: f_0; f_1, f_3 и f_4. В этом случае $\{f_0, f_2, f_3, f_4\}$ – полный подкласс класса K. Итак, в обоих случаях в K найдется полный подкласс, содержащий не более четырех функций.

Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий, что в формулировке теоремы 2.5 оценку 4 нельзя заменить на 3. Рассмотрим класс

$$K = \{\theta(x), \iota(x), x \cdot y, x+y+z\}.$$

Очевидно, что $\theta(x)$ не принадлежит T_1, $\iota(x)$ не принадлежит T_0. Функция $x \cdot y$ не является, как отмечалось, ни самодвойственной, ни линейной. Нетрудно проверить, что $x+y+z$ – немонотонная функция. Следовательно, по теореме Поста K – полный класс. В то же время любой его собственный подкласс полным не является. Действительно, если удалить функцию $\theta(x)$, то оставшиеся функции будут сохранять 1, если удалить $\iota(x)$, то будут сохранять 0. Класс функций K без функции $x \cdot y$ состоит из линейных функций, а без последней функции – из монотонных.

Параграф закончим рассмотрением следующего понятия.

Определение. Замкнутый класс K называется *предполным*, если K – неполный класс, но для любой функции $f \notin K$ класс $K \cup \{f\}$ является полным.

Теорема 2.6. Предполными являются классы T_0, T_1, S, M и L и только они.

Доказательство. Необходимость докажем на примере класса T_0. Класс T_0 содержит несамодвойственную и нелинейную функцию $x \cdot y$, немонотонную функцию $x+y$ и функцию $\theta(x)$, не сохраняющую 1. Если $f \notin T_0$, то класс $L = \{\theta(x), f, x \cdot y, x+y\}$ не содержится ни в одном из основных замкнутых классов, и поэтому L – полный класс. Поскольку $L \subseteq T_0 \cup \{f\}$, класс $T_0 \cup \{f\}$ также является полным.

Докажем достаточность. Пусть K – предполный класс. Поскольку класс K не является полным, то K содержится в одном из основных замкнутых классов. Для определенности предположим, что $K \subseteq T_0$. Если $K \subset T_0$, то существует функция f такая, что $f \notin K$ и $f \in T_0$. Тогда $K \cup \{f\} \subseteq T_0$ и класс $K \cup \{f\}$ не может быть полным. Следовательно, $K = T_0$. Теорема доказана.

Задачи

1. Доказать, что $[K \cap L] \subseteq [K] \cap [L]$, $[K] \cup [L] \subseteq [K \cup L]$.

2. Содержит ли замыкание класса $\{\iota(x), x \cdot y, x \vee y\}$ функции $\theta(x)$, $\nu(x)$?

3. Выяснить, является ли функция f двойственной функции g

а) $f = x+y$, $g = x \leftrightarrow y$; б) $f = x \to y$, $g = y \to x$;

в) $f = x \to y$, $g = \nu(x) \cdot y$; г) $f = (x+y) \cdot z$, $g = (x+y) \cdot (z+1)$;

д) $f = (x \cdot y) \vee (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$, $g = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$;

е) $f = x \leftrightarrow y$, $g = (\nu(x) \cdot y) \vee (x \cdot \nu(y))$.

4. Выяснить, будут ли следующие функции самодвойственными: $\nu(x)$, xy, $(x \cdot y) \vee (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$, $(x \vee y) \cdot (x \vee z) \cdot (y \vee z)$, $x+y+z$.

5. Показать, что не существует самодвойственной функции, существенно зависящей от двух переменных.

6. Доказать монотонность функций $x \cdot (y \vee z)$, $x \vee (y \cdot z)$, $\max(x, y, z)$, $\min(x, y, z)$.

7. Выяснить, будут ли следующие функции монотонны: $yx+y$, $xy+y+x$, $x \leftrightarrow y$, $x \to (y \to x)$, $(x \cdot y) \vee (x \cdot z) \vee (y \cdot z)$, $x \to (x \to y)$.

8. Доказать, что функция, двойственная монотонной, сама монотонна.

9. Система функций C называется *базисом* замкнутого класса K, если замыкание системы C совпадает с K, но замыкание любой собственной подсистемы системы C уже не совпадает с K. Доказать, что система $\{\theta(x), \iota(x), x \cdot y, x \vee y\}$ образует базис в классе всех монотонных функций.

10. Выяснить, будут ли следующие функции линейными: $x \downarrow y$, $\nu(x \leftrightarrow \nu(y))$, $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$, $x \to (y \to x)$.

11. Сведением к известным полным классам доказать полноту классов функций:

а) $\{x \to y, \nu(x)\}$, б) $\{x \to y, \theta(x)\}$,
в) $\{x \downarrow y\}$, г) $\{x \to y, x+y\}$,
д) $\{x \vee y, x+y, \iota(x)\}$, е) $\{x \leftrightarrow y, \theta(x), x \vee y\}$.

12. Используя теорему Поста, доказать полноту классов функций:

а) $\{x \vee y, \nu(x))\}$, б) $\{x \to y, \nu(x)\}$,
в) $\{x \cdot y+x, x+y, \iota(x))\}$, г) $\{x+y, x \leftrightarrow (y \cdot z)\}$,
д) $\{x \cdot y, x+y, x \leftrightarrow (x \cdot y)\}$, е) $\{x \leftrightarrow y, \theta(x), x \vee y\}$.

13. Выяснить, будут ли полными следующие классы функций:

а) $\{xy, x+y+1\}$;
б) $\{\theta(x), \iota(x), (x \cdot y) \vee z\}$;
в) $\{\theta(x), \iota(x), x \leftrightarrow y\}$;
г) $\{x \cdot y+x, x \leftrightarrow y, \theta(x)\}$;
д) $\{x \vee y, x \cdot y+x \cdot z\}$;
е) $\{\nu(x), (x \cdot y) \vee (x \cdot z) \vee (y \cdot z)\}$;
ж) $\{\iota(x), \nu(x), x+y+\max(x, y, z)\}$;
з) $\{x+y, x \vee y \vee \nu(z)\}$.

14. Функцию назовем *полной*, если класс, единственным элементом которого является эта функция, будет полным. Доказать, что штрих Шеффера и стрелка Пирса – единственные полные функции среди всех двухместных функций.

Ответы, указания и решения

1. Приведем доказательство включения $[K\cap L] \subseteq [K]\cap[L]$. Пусть $\{M_i \mid i\in I\}$ – семейство замкнутых классов, содержащих $K\cap L$, $\{K_j \mid j\in J\}$ – семейство замкнутых классов, содержащих K. Тогда, поскольку $K\cap L \subseteq K$, то все K_j содержат $K\cap L$, т. е.

$$\{K_j \mid j\in J\} \subseteq \{M_i \mid i\in I\}.$$

Отсюда следует, что $\cap\{K_j \mid j\in J\} \supseteq \cap\{M_i \mid i\in I\}$. Это означает, что $[K\cap L] \subseteq [K]$. Аналогично доказывается включение $[K\cap L] \subseteq [L]$. Следовательно, $[K\cap L] \subseteq [K]\cap[L]$.

2. Приведем решение задачи. Пусть $K = \{\iota(x), xy, x\vee y\}$. Функции $\theta(x)$ и $\nu(x)$ не принадлежат $[K]$, поскольку все функции из K (а следовательно, и из $[K]$) сохраняют единицу, а функции $\theta(x)$ и $\nu(x)$ единицу не сохраняют.

3. Указание. Построить таблицу, задающую двойственную к f функцию и функцию g. В случаях а), в), д) и е) ответ положительный, в остальных случаях – отрицательный.

4. Указание. Построить таблицу, задающую функцию f и двойственную к ней. Функции $\nu(x)$, $(xy)\vee(xz)\vee(yz)$ и $(x\vee y)\cdot(x\vee z)\cdot(y\vee z)$ самодвойственны (последние две просто равны), остальные нет.

5. Указание. Рассмотреть таблицы, задающие функции, существенно зависящие от двух переменных.

6. Указание. Проставить значения функций в вершинах диаграммы частично упорядоченного множества B^3.

7. Монотонными являются функции $xy+y+x$, $x \to (y\to x)$, $(xy) \vee (xz) \vee (yz)$.

9. Приведем решение задачи. Класс функций $\{\theta(x), \iota(x), xy, x\vee y\}$ обозначим буквой C. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – монотонная функция. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ тождественно равна 0, то $f(x_1, \ldots, x_n) = \theta(x_1)\cdot\ldots\cdot\theta(x_n)$. Если же эта функция тождественно равна 1, то $f(x_1, \ldots, x_n) = \iota(x_1)\cdot\ldots\cdot\iota(x_n)$. Следовательно, в этих двух случаях функция f принадлежит $[C]$. Будем считать, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ принимает оба значения. Рассмотрим диаграмму B^n частично упорядоченного множества B^n и в вершинах диаграммы проставим значения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Поскольку функция f монотонна, то из того, что в некоторой вершине функция f принимает значение 1, следует, что и всюду выше она принимает то же значение. (В частности, в нижней вершине диаграммы f принимает значение 0, в верхней – значение 1.) Отсюда следует, что существуют вершины диаграммы $a^1, a^2, \ldots, a^k$ такие, что $f(b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a^i \leq b$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Другими словами, $\{a \in B^n \mid f(a) = 1\} = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k$, где $D_i = \{a \in B^n \mid a^i \leq a\}$ (см. рис. 2.3).

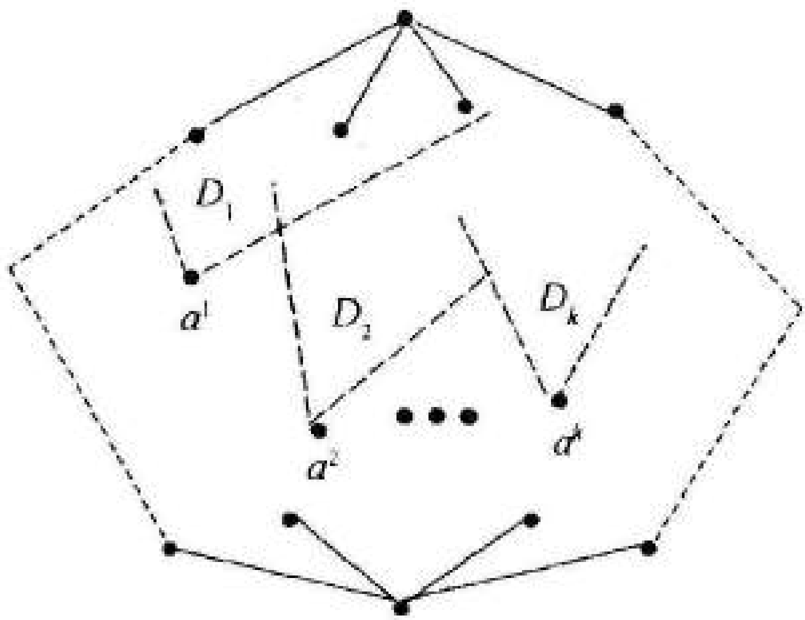


Рис. 2.3

Рассмотрим вектор a^1. Пусть у этого вектора единицы стоят на местах $i_1, i_2, \ldots, i_l$. Для упрощения обозначений предположим, что $i_1 = 1, \ldots, i_l = l$. Пусть $g_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_l$. Легко видеть, что $D_1 = \{a \in B^n \mid g_1(a) = 1\}$. Аналогичным образом получаем существование функций $g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $D_2 = \{a \in B^n \mid g_2(a) = 1\}, \ldots, D_k = \{a \in B^n \mid g_k(a) = 1\}$. Тогда, поскольку множество $\{a \in B^n \mid f(a) = 1\}$ есть объединение $D_1 \cup \ldots \cup D_k$, получаем равенство:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee g_k(x_1, \ldots, x_n).$$

Мы доказали, что замыкание класса C совпадает с M, т. е. с классом всех монотонных функций. Покажем, что C – базис M.

Если из C удалить $\theta(x)$, то из оставшихся функций нельзя выразить $0(x)$, поскольку они сохраняют 1. Аналогично доказывается, что нельзя удалить $\iota(x)$.

Докажем, что замыкание класса $C'' = C\setminus\{x{\cdot}y\}$ не содержит $x{\cdot}y$. Предположим противное: пусть $x{\cdot}y$ выражается (с помощью суперпозиции и переименования аргументов) через функции класса C'' и пусть $g(x, y)$ – самое короткое выражение для этой функции. (В частности, это означает, что $x{\cdot}y = g(x, y)$.) Тогда $g(x, y) \neq \theta(h(x, y))$ для некоторого $h(x, y)$, поскольку в случае равенства $g(x, y) = \theta(h(x, y))$ произведение xy тождественно равно 0. Аналогично заключаем, что $g(x, y) \neq \iota(h(x, y))$. Следовательно, $x{\cdot}y = g(x, y) = g_1(x, y) \vee g_2(x, y)$. Отсюда следует, что $g_1(0, 0) = g_1(1, 0) = g_1(0, 1) = 0$ и $g_2(0, 0) = g_2(1, 0) = g_2(0, 1) = 0$, поскольку $0{\cdot}0 = 1{\cdot}0 = 0{\cdot}1 = 0$. Далее, так как $1 = 1{\cdot}1 = g_1(1, 1) \vee g_2(1, 1)$, имеем $g_1(1, 1) = 1$ или $g_2(1, 1) = 1$. Это означает, что в качестве $g(x, y)$ можно взять $g_1(x, y)$ или $g_2(x, y)$, что противоречит выбору функции $g(x, y)$. Следовательно, $x{\cdot}y$ не принадлежит замыканию класса $C\setminus\{x{\cdot}y\}$. Аналогично доказывается, что $x \vee y \notin [C\setminus\{x \vee y\}]$.

Мы доказали, что $\{\theta(x), \iota(x), x{\cdot}y, x \vee y\}$ – базис класса монотонных функций.

10. Указание. См. решение аналогичной задачи в начале § 4. Линейными являются все функции, кроме первой.

12. Приведем решение задачи 12 г. Пусть $K = \{x+y, x \leftrightarrow (yz)\}$. В силу теоремы Поста надо в классе K найти функцию, не сохраняющую 0, функцию, не сохраняющую 1, несамодвойственную, немонотонную, нелинейную функции. Функция $x \leftrightarrow (yz)$ не сохраняет 0, поскольку $0 \leftrightarrow (0{\cdot}0) = 1$. Функция $x+y$ не сохраняет 1. Она же несамодвойственна (см. табл. 2.6) и немонотонна (см. рис. 2.4).

Таблица 2.6

x	y	$x+y$	$\nu(x)+\nu(y)$	$\nu(\nu(x)+\nu(y))$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

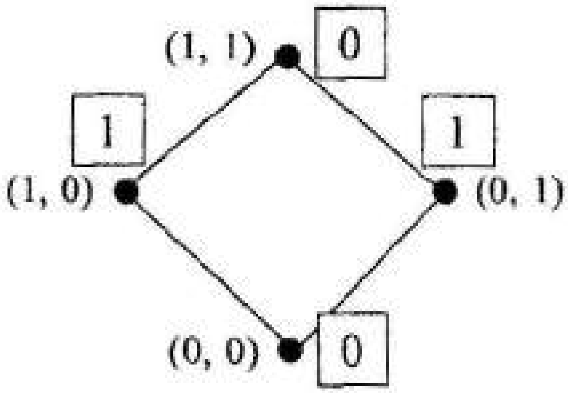


Рис. 2.4

Докажем, что функция $x \leftrightarrow (y \cdot z)$ нелинейна. Предположим, что $x \leftrightarrow (y \cdot z) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z$. Составим таблицу, задающую функции из левой и правой частей равенства (см. табл. 2.7).

Таблица 2.7

x	y	z	$a_0+a_1 \cdot x+a_2 \cdot y+a_3 \cdot z$	Следствие
0	0	0	a_0	$a_0 = 1$
0	0	1	$1+a_3$	$a_3 = 0$
0	1	0	$1+a_2$	$a_2 = 0$
0	1	1	1	Противоречие
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Полученное противоречие показывает, что $x \leftrightarrow (y \cdot z)$ – нелинейная функция. (Разумеется, таблицу можно было бы ограничить первыми четырьмя строками.)

13. Указание. Применить теорему Поста. В случаях г), ж) и з) классы будут полными, в остальных – нет.

Глава 3
ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Логика высказываний обладает довольно слабыми выразительными возможностями. В ней нельзя выразить даже очень простые с математической точки зрения рассуждения. Рассмотрим, например, следующее умозаключение: «Всякое целое число является рациональным. Число 2 – целое. Следовательно, 2 – рациональное число». Все эти утверждения, с точки зрения логики высказываний, являются атомарными. Средствами логики высказываний нельзя вскрыть внутреннюю структуру, и поэтому нельзя доказать логичность этого рассуждения в рамках логики высказываний. Мы рассмотрим расширение логики высказываний, которое называется логикой предикатов первого порядка (или логикой первого порядка, или логикой предикатов).

§ 1. Предикаты и операции над ними

Введем основное понятие данной главы.

Определение. Пусть M – непустое множество. Тогда *n-местным предикатом, заданным на M,* называется выражение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при замене этих переменных элементами множества M.

Рассмотрим примеры. Пусть M есть множество натуральных чисел N. Тогда выражения «x – простое число», «x – четное число», «x больше 10» являются одноместными предикатами. При подстановке вместо x натуральных чисел получаются высказывания: «2 – простое число», «6 – простое число», «3 – четное число», «5 больше 10» и т. д. Выражения «x больше y», «x делит y нацело», «x плюс y равно 10» являются двухместными предикатами. (Конечно, последнее выражение можно было записать и так: «$x+y=10$».) Примеры трехместных предикатов, заданных на множестве натуральных чисел: «число z лежит между x и y», «x плюс y равно z», «$|x-y| \le z$».

Будем считать, что *высказывание есть нульместный предикат*, т. е. предикат, в котором нет переменных для замены.

Надо отметить, что местность предикатов не всегда равна числу *всех* переменных, содержащихся в выражении. Например, выражение «существует число x такое, что $y = 2x$» на множестве натуральных чисел определяет одноместный предикат. По смыслу этого выражения в нем можно заменять только переменную y. Например, замена y на 6 дает истинное высказывание: «существует число x такое, что $6 = 2x$», а замена y на 7 дает ложное (на множестве N) высказывание: «существует число x такое, что $7 = 2x$».

Предикат с заменяемыми переменными $x_1, \ldots, x_n$ будет обычно обозначаться заглавной латинской буквой, после которой в скобках указаны эти переменные. Например, $P(x_1, x_2)$, $Q(x_2, x_3)$, $R(x_1)$. Среди переменных в скобках могут быть и фиктивные.

На совокупности всех предикатов, заданных на множестве M, вводятся знакомые операции: *конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация* и *эквиваленция*. Эти операции вводятся довольно очевидным образом. Приведем в качестве примера определение конъюнкции предикатов.

Определение. Предикат $W(x_1, \ldots, x_n)$ называется *конъюнкцией* предикатов $U(x_1, \ldots, x_n)$ и $V(x_1, \ldots, x_n)$, заданных на множестве M, если для любых $a_1, \ldots, a_n$ из M высказывание $W(a_1, \ldots, a_n)$ есть конъюнкция высказываний $U(a_1, \ldots, a_n)$ и $V(a_1, \ldots, a_n)$.

Легко по аналогии привести определения и других упомянутых выше операций.

В логике предикатов первого порядка вводятся и две новые операции. Называются они навешиванием квантора общности и навешиванием квантора существования. Эти операции рассмотрим вначале на примерах. Пусть дано выражение «существует x такой, что $x+y = 10$». На множестве натуральных чисел это предложение определяет одноместный предикат $P(y)$, так $P(2)$ и $P(9)$ – истинные высказывания, $P(11)$ – ложное. Если обозначить предикат «$x+y = 10$» через $S(x, y)$ (а это предикат двухместный), то $P(y)$ можно записать так: «существует x такой, что $S(x, y)$». В этом случае говорят, что предикат $P(y)$ получен из предиката $S(x, y)$ навешиванием квантора существования на x и пишут $P(y) = (\exists x)S(x, y)$. Рассмотрим другой пример. Выражение «для всех x справедливо, что $y \geq -x^2$» определяет на множестве целых чисел одноместный предикат $Q(y)$. Если предикат «$y \geq -x^2$» обозначить через $T(x, y)$, то $Q(y)$ можно записать так: «для всех x справедливо $T(x, y)$». В таком случае говорят, что предикат $Q(y)$ получен из предиката $T(x, y)$ навешиванием квантора общности на x и пишут $Q(y) = (\forall x)T(x, y)$.

После этих примеров нетрудно дать определение в общем виде.

Определение. Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ – предикат, заданный на множестве M, y – переменная. Тогда выражение «для всякого y выполняется $P(x_1, \ldots, x_n)$» – предикат, полученный из P *навешиванием квантора общности на переменную* y, а выражение «существует y такой, что выполняется $P(x_1, \ldots, x_n)$» – предикат, полученный из P *навешиванием квантора существования на переменную* y.

Обозначения этих операций были введены выше.

Заметим, что в определении не требуется, чтобы переменная y была одной из переменных $x_1, \ldots, x_n$, хотя в содержательных примерах, которые будут приведены ниже, квантор будет навешиваться на одну из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Указанное требование не налагается в определении, чтобы избежать усложнения определения формулы логики предикатов. Если y – одна из переменных $x_1, \ldots, x_n$, то после навешивания квантора на переменную y новый предикат является $(n-1)$-местным, если же $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, то местность нового предиката равна n.

Если предикат $W(x_1, \ldots, x_n)$ получен из предикатов $U(x_1, \ldots, x_n)$ и $V(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью связок, то истинность высказывания $W(a_1, \ldots, a_n)$ определяется таблицами истинности этих связок. Пусть $W(x_1, \ldots, x_n) = (\forall y)U(x_1, \ldots, x_n, y)$. Тогда высказывание $W(a_1, \ldots, a_n)$ истинно тогда и только тогда, когда для любого $b \in M$ истинно высказывание $U(a_1, \ldots, a_n, b)$. Если же $W(x_1, \ldots, x_n) = (\exists y)U(x_1, \ldots, x_n, y)$, то высказывание $W(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в том и только в том случае, когда найдется $b \in M$, для которого высказывание $U(a_1, \ldots, a_n, b)$ истинно.

Понятие предиката – весьма широкое понятие. Это видно уже из приведенных выше примеров. Расширим запас таких примеров, показав, что n-местная функция может рассматриваться как $(n+1)$-местный предикат. Действительно, функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной на множестве M, можно поставить в соответствие выражение «y равно $f(x_1, \ldots, x_n)$». Это выражение есть некоторый предикат $P(x_1, \ldots, x_n, y)$. При этом, если элемент b есть значение функции в точке $(a_1, \ldots, a_n)$, то высказывание $P(a_1, \ldots, a_n, b)$ истинно, и обратно. (Подобное «превращение» функции в предикат мы уже делали выше для сложения натуральных чисел.)

На предикаты можно смотреть и более формально, причем с двух точек зрения.

Во-первых, предикат можно представить отношением следующим образом. Пусть предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ задан на множестве M. Рассмотрим прямую степень этого множества $M^n = M \times M \times \ldots \times M$ и подмножество D_p множества M^n, определяемое равенством:

$$D_p = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n \mid \text{высказывание } P(a_1, \ldots, a_n) \text{ истинно}\}.$$

Отношение D_p можно назвать областью истинности предиката P. Во многих случаях предикат P можно отождествить с отношением D_p. При этом, правда, возникают некоторые трудности при определении операций над отношениями, аналогичных операциям над предикатами.

Во-вторых, предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, заданный на M, можно отождествить с функцией $f_p\colon M^n \to \{0, 1\}$, определяемой равенством

$$f_p(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } P(a_1, \ldots, a_n) \text{ истинно}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Мы в основном будем понимать термин «предикат» в смысле исходного определения, т. е. как языковое выражение. Связано это с тем, что одной из главных целей, как уже отмечалось во введении, является изучение выразительных возможностей логики первого порядка, возможности представления средствами этой логики информации, выраженной на естественном (скажем, русском) языке.

§ 2. Формулы логики первого порядка

Целью параграфа является введение понятия, вынесенного в его заголовок. В принципе это делается так же, как и в логике высказываний, т. е. сначала вводится понятие атомарной формулы, а затем формулы. Только с определением атомарной формулы в случае логики первого порядка ситуация несколько сложнее.

Будем исходить из следующих трех множеств: $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$, V. Элементы множества $\boldsymbol{F}$ – символы (или имена) функций, элементы $\boldsymbol{R}$ – символы (или имена) предикатов, элементы множества V – переменные. Будем считать, что каждому символу функции и предиката поставлено в соответствие натуральное число или нульместность (т. е. число аргументов) этого символа. Допускаются нульместные символы функций, которые называются *константами*, и нульместные символы предикатов (последние будут играть роль атомарных формул логики высказываний). Объединение $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}$ будем называть *сигнатурой*. Сигнатуру заранее фиксировать не будем, она будет определяться содержанием решаемой задачи. Множество V предполагается бесконечным, для обозначения его элементов будут использоваться, как правило, буквы x, y, z, u, y, w с индексами и без них.

В примерах, приведенных выше, мы видели, что для записи предикатов использовались арифметические выражения: $2x$, $x+y$, x^2. Аналогом арифметического выражения в логике служит понятие «терма».

Определение. *Термами* называются:

1) переменные и константы;

2) выражения вида $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ – термы, а f – n-местный функциональный символ.

Можно сказать, что терм – выражение, полученное из переменных и констант с помощью символов функций.

Определение. *Атомарной формулой* называется выражение вида $r(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ – термы, r – символ n-местного предиката.

Примерами атомарных формул являются выражения $x \leq y^2+1$, $|x-y| < z$, x делит нацело $y-3$.

Определение. *Формулами логики первого порядка* называются:

1) атомарные формулы;

2) выражения вида $(F)\&(G)$, $(F_1)\vee(G)$, $\neg(F)$, $(F)\rightarrow(G)$, $(F)\leftrightarrow(G)$, $(\forall v)(F)$, $(\exists v)(F)$, где F и G – формулы логики предикатов, v – переменная.

Формула F в двух последних выражениях называется *областью действия квантора по переменной* v.

К соглашениям о приоритете операций, принятом в логике высказываний, добавим следующее: кванторы имеют одинаковый приоритет, который больше приоритета всех связок.

Определение. Вхождение переменной в формулу называется *связанным*, если переменная стоит непосредственно за квантором или входит в область действия квантора по этой переменной. В противном случае вхождение называется *свободным*.

Например, в формуле

$$F = t(x) \,\&\, (\forall y)[s(x, y) \to (\exists x)(r(x, y) \vee t(y))].$$

Первое и второе вхождение переменной x свободны, третье и четвертое связаны. Все вхождения переменной y связаны.

Определение. Переменная называется *свободной в формуле*, если существует хотя бы одно свободное вхождение переменной в формулу.

Формула F из предыдущего примера имеет одну свободную переменную x.

Если $x_1, \ldots, x_n$ – все свободные переменные формулы F, то эту формулу будем обозначать через $F(x_1, \ldots, x_n)$. Это обозначение будем применять и в том случае, когда не все переменные из $x_1, \ldots, x_n$ являются свободными в F.

Как и в логике высказываний, в логике первого порядка вводится понятие подформулы. Соответствующее определение получится из определения подформулы из §2 главы 1 добавлением фразы: «Подформулами формул $(\forall v)(F)$ и $(\exists v)(F)$ являются они сами и все подформулы формулы F».

§ 3. Интерпретация в логике первого порядка

Необходимо соотнести формулы логики предикатов первого порядка и предикаты. Как и в логике высказываний, подобное соотнесение осуществляет функция, называемая интерпретацией.

Определение. *Интерпретацией* на непустом множестве M называется функция, заданная на сигнатуре $F \cup R$, которая:

1) константе ставит в соответствие элемент из M;

2) символу n-местной функции ставит в соответствие некоторую n-местную функцию, определенную на множестве M;

3) символу n-местного предиката ставит в соответствие n-местный предикат, заданный на M.

В результате любая формула F получает в соответствие предикат, местность которого равна числу свободных переменных формулы F.

Приведем примеры. Пусть сигнатура состоит из символов одноместного предиката P и двухместного предиката D, $M = \{2, 3, 6, 9, 12, 15\}$ и $F = P(x)$ & $(\forall y)(P(y) \to D(x, y))$.

Поставим в соответствие символу P предикат «x – простое число», символу D – предикат «x меньше или равно y». Тогда формула F получит в соответствие предикат «$x = 2$». На этом же множестве можно рассмотреть и другую интерпретацию: P ставится в соответствие «x – нечетное число», D – предикат «x делит y». В таком случае формула F получает в соответствие предикат «$x = 3$». Если φ – интерпретация, то предикат, соответствующий формуле F, будем обозначать через φF.

Одним из основных типов задач этой главы являются задачи, связанные с использованием выразительных возможностей языка логики предикатов. В качестве примера рассмотрим задачу перевода на язык логики предикатов следующего рассуждения: «Каждый первокурсник знаком с кем-либо из спортсменов. Никакой первокурсник не знаком ни с одном любителем подледного лова. Следовательно, никто из спортсменов не является любителем подледного лова». Для удобства ссылок это рассуждение условимся называть рассуждением о первокурсниках. Выберем следующую сигнатуру (сигнатурные элементы приведены с предполагаемой интерпретацией):

$\Pi(x)$: «x – первокурсник»;

$C(x)$: «x – спортсмен»;

$Л(x)$: «x – любитель подледного лова»;

$З(x, y)$: «x знаком с y».

Тогда рассуждение запишется в виде следующей последовательности формул:

$$H_1 = (\forall x)[П(x) \to (\exists y)(С(y) \ \& \ З(x, y))],$$
$$H_2 = (\forall x)(\forall y)[П(x) \& Л(y) \to \neg З(x, y)],$$
$$H_3 = (\forall x)(С(x) \to \neg Л(x)).$$

Мы установили, что выразительных средств логики предикатов достаточно, чтобы записать рассуждение о первокурсниках. Естественно далее поставить вопрос, логично ли оно? Будет ли третье предложение следствием первых двух? На этот вопрос мы ответим в § 5.

§ 4. Равносильность, законы логики первого порядка

Общая схема изложения материала этого и двух следующих параграфов будет напоминать изложение материала в § 3–5 главы 1.

Определение. Формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ и $G(x_1, \ldots, x_n)$ называются *равносильными*, если для любой интерпретации φ с областью M высказывания $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_n)$ и $(\varphi G)(a_1, \ldots, a_n)$ при любых $a_1, \ldots, a_n$ из M одновременно истинны или одновременно ложны.

Приведем пример. Пусть P – символ двухместного предиката. Докажем, что формулы $F(x) = \neg(\forall y)P(x, y)$ и $G(x) = (\exists y)\neg P(x, y)$ равносильны. Возьмем интерпретацию φ с областью M. Пусть высказывание $(\varphi F)(a)$ истинно для $a \in M$. Истинность этого высказывания означает, что не для всякого $y \in M$ высказывание $(\varphi P)(a, y)$ истинно. Следовательно, найдется $b \in M$, для которого высказывание $(\varphi P)(a, b)$ ложно. Если высказывание $(\varphi P)(a, b)$ ложно, то высказывание $\neg(\varphi P)(a, b)$ истинно. Отсюда следует, что найдется $y \in M$ такой, для которого высказывание $\neg(\varphi P)(a, y)$ истинно. Это означает истинность высказывания $(\varphi G)(a)$. Мы доказали, что если высказывание $(\varphi F)(a)$ истинно, то высказывание $(\varphi G)(a)$ тоже истинно. Обратная импликация доказывается аналогично. Итак, значения истинности высказываний $(\varphi F)(a)$ и $(\varphi G)(a)$ при любом $a \in M$ совпадают. Следовательно, формулы $F(x)$ и $G(x)$ равносильны.

Определение. Формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *тождественно истинной*, если для любой интерпретации φ с областью M высказывание $(\varphi F)(a_1, \ldots, a_n)$ при любых $a_1, \ldots, a_n$ из M является истинным.

Приведем пример. Рассмотрим формулу $F(x) = (\forall y)P(x, y) \to \to P(x, c)$, где P – символ двухместного отношения, c – константа. Докажем, что формула $F(x)$ тождественно истинна. Возьмем интерпретацию φ с областью M и элемент a из M. Высказывание $(\varphi F)(a)$ равно $(\forall y)(\varphi P)(a, y) \to (\varphi P)(a, \varphi(c))$. Если посылка $(\forall y)(\varphi P)(a, y)$ ложна, то вся импликация $(\varphi F)(a)$ истинна. Предположим, что посылка $(\forall y)(\varphi P)(a, y)$ истинна. Это означает, что для всякого $y \in M$ высказывание $(\varphi P)(a, y)$ истинно, в том числе оно истинно и для $y = \varphi(c)$. Следовательно, истинны заключение $(\varphi P)(a, \varphi(c))$ и вся импликация $(\varphi F)(a)$. Мы доказали, что высказывание $(\varphi F)(a)$ истинно для любого $a \in M$. Это означает, что формула $F(x)$ является тождественно истинной.

Понятия равносильности и тождественной истинности в логике первого порядка связаны точно так же, как и в логике высказываний.

Теорема 3.1. Формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ и $G(x_1, \ldots, x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда формула

$$F(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow G(x_1, \ldots, x_n)$$

тождественно истинна.

Доказательство теоремы 3.1 аналогично доказательству теоремы 1.1 и предлагается читателю в качестве упражнения.

Как и в случае логики высказываний, приведем список основных равносильностей – законов логики предикатов. Прежде всего, получим законы логики предикатов из законов 1–21 логики высказываний, понимая под F, G, H произвольные формулы логики предикатов. Дополним полученный список законами, специфичными для логики предикатов:

22) $(\forall x)(F(x) \& G(x))$ равносильна $(\forall x)F(x) \ \& \ (\forall x)G(x)$;

23) $(\exists x)(F(x) \vee G(x))$ равносильна $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x)$;

24) $(\forall x)(\forall y)F(x, y)$ равносильна $(\forall y)(\forall x)F(x, y)$;

25) $(\exists x)(\exists y)F(x, y)$ равносильна $(\exists y)(\exists x)F(x, y)$;

26) $\neg(\forall x)F(x)$ равносильна $(\exists x)\neg F(x)$;

27) $\neg(\exists x)F(x)$ равносильна $(\forall x)\neg F(x)$.

Законы 22, 23 утверждают, что квантор общности можно переносить через конъюнкцию, а квантор существования – через дизъюнкцию. Естественно поставить вопрос: можно ли квантор существования переносить через конъюнкцию, а квантор общности – через дизъюнкцию. Другими словами, будут ли равносильны следующие пары формул:

$$(\forall x)(F(x)\vee G(x)) \quad \text{и} \quad (\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x),$$
$$(\exists x)(F(x)\& G(x)) \quad \text{и} \quad (\exists x)F(x)\ \&\ (\exists x)G(x)?$$

Оказывается, нет. Докажем это для случая, когда $F(x)$ и $G(x)$ – атомарные формулы. Пусть основное множество – множество натуральных чисел N, $F(x)$ – предикат «x – четное число», $G(x)$ – предикат «x – нечетное число». Обозначим эту интерпретацию буквой φ. Тогда $\varphi[(\forall x)(F(x)\vee G(x))] = 1$, но $\varphi[(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)] = 0$. Аналогично, $\varphi[(\exists x)(F(x)\& G(x))] = 0$ и $\varphi[(\exists x)F(x)\ \&\ (\exists x)G(x)] = 1$.

Рассмотрим законы 23 и 24. Они утверждают, что одноименные кванторы можно менять местами. Можно ли переставлять местами разноименные кванторы, сохраняя равносильность? Другими словами, равносильны ли формулы

$$(\forall x)(\exists y)F(x, y) \quad \text{и} \quad (\exists y)(\forall x)F(x, y)?$$

Оказывается, тоже нет. В качестве основного множества опять возьмем множество натуральных чисел, $F(x, y)$ будем считать атомарной формулой и поставим ей в соответствие предикат «x меньше y». Тогда левая формула будет истинной, правая – ложной.

Вернемся к законам 22 и 23. Мы отмечали, что квантор общности нельзя переносить через дизъюнкцию, а квантор существования – через конъюнкцию. Тем не менее, если одна из формул F или G не содержит переменной x (на которую навешивается квантор), то это делать можно. Запишем соответствующие законы:

28) $(\forall x)(F(x)\vee G)$ равносильна $(\forall x)(F(x) \vee G$;

29) $(\exists x)(F(x)\& G)$ равносильна $(\exists x)(F(x)\ \&\ G$, где G не содержит x.

Законы 22, 23, 28, 29 можно записать в общем виде:

30) $(Q_1x)(Q_2u)(F(x) \vee G(u))$ равносильна $(Q_1x)F(x) \vee (Q_2u)G(u)$;

31) $(Q_1x)(Q_2u)(F(x) \& G(u))$ равносильна $(Q_1x)F(x) \& (Q_2u)G(u)$, где Q_1, Q_2 – кванторы $\forall$ или $\exists$, переменная u не входит в $F(x)$, а переменная x не входит в $G(u)$.

Для доказательства равносильности двух формул могут оказаться полезными следующие законы:

32) $(\forall x)F(x)$ равносильна $(\forall z)F(z)$;

33) $(\exists x)F(x)$ равносильна $(\exists z)F(z)$.

В законах 32 и 33 переменная z не входит в $F(x)$, а переменная x не входит в $F(z)$.

В логике высказываний мы применяли два способа доказательства равносильности формул: построение совместной таблицы истинности и переход от одной формулы к другой с помощью законов. В случае логики первого порядка остается только второй способ.

Проиллюстрируем его на примере следующей задачи: доказать равносильность формул:

$$F = \neg(\forall x)(\exists y)[S(x) \& P(x, y) \to (\exists z)(T(z) \& P(x, z))],$$
$$G = (\exists x)(\forall y)[S(x) \& P(x, y) \& (\forall z)(T(z) \to \neg P(x, z))].$$

Применив к формуле F последовательно законы 26, 27 и 20, получим, что формула F равносильна формуле

$$F_1 = (\exists x)(\forall y)\neg[\neg(S(x) \& P(x, y)) \vee (\exists z)(T(z) \& P(x, z))].$$

Далее, используя законы 18, 19 и 27, из F_1 получаем формулу

$$F_2 = (\exists x)(\forall y)[S(x) \& P(x, y) \& (\forall z)\neg(T(z) \& P(x, z))].$$

Осталось заметить, что в силу законов 17 и 20 в формуле F_2 подформулу $\neg(T(z) \& P(x, z))$ можно заменить на $T(z) \to \neg P(x, z)$.

Подчеркнем, что доказательство равносильности двух формул обычно проводится с помощью законов логики первого порядка. Доказательство того, что формулы неравносильны, осуществляется построением интерпретации, при которой одна формула истинна, другая ложна. Например так, как это было сделано выше для доказательства неравносильности формул $(\forall x)(F(x) \vee G(x))$ и $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$. Разумеется, формулы до построения интерпретации можно предварительно преобразовывать с помощью законов.

§ 5. Логическое следствие

Определение. Формула $G(x_1, \ldots, x_n)$ называется *логическим следствием* формул $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n)$, если для любой интерпретации φ с областью M и любых $a_1, \ldots, a_n \in M$ из истинности высказываний $(\varphi F_1)(a_1, \ldots, a_n), \ldots, (\varphi F_k)(a_1, \ldots, a_n)$ следует истинность высказывания $(\varphi G)(a_1, \ldots, a_n)$.

Приведем примеры. Пусть $F_1 = (\forall x)(P(x) \to Q(x) \& R(x))$, $F_2 = P(c)$, $G = Q(c)$. Покажем, что формула G является логическим следствием формул F_1 и F_2. Возьмем интерпретацию φ с областью M такую, что высказывания φF_1 и φF_2 истинны. Элемент $\varphi(c)$ обозначим буквой b. Истинность φF_2 означает, что высказывание $(\varphi P)(b)$ истинно. А истинность высказывания φF_1 означает, что для любого элемента $x \in M$ истинно высказывание $(\varphi P)(x) \to (\varphi Q)(x) \& (\varphi R)(x)$. Поскольку это высказывание истинно для любого x, оно, в частности, истинно для $x = b$. Мы видим, что истинна импликация $(\varphi P)(b) \to (\varphi Q)(b) \& (\varphi R)(b)$ и ее посылка $(\varphi P)(b)$. Из таблицы истинности импликации следует истинность заключения $(\varphi Q)(b) \& \& (\varphi R)(b)$. Следовательно, истинно высказывание $(\varphi Q)(b)$. А это и есть φG. Мы доказали, что если истинны высказывания φF_1 и φF_2, то истинно высказывание φG, т. е. что G –логическое следствие F_1 и F_2.

В качестве второго примера докажем нелогичность рассуждения о первокурсниках, приведенное в §3. Мы записали это рассуждение в виде последовательности формул H_1, H_2 и H_3. Для доказательства нелогичности рассуждения надо найти интерпретацию φ, при которой формулы H_1 и H_2 истинны, а формула H_3 ложна. Пусть множество M состоит из трех элементов 2, 3, 4. Символы C, $Л$ и $П$ проинтерпретируем следующим образом:

$(\varphi C)(x)$ = «x – простое число»;

$(\varphi Л)(x)$ = «x – четное число»;

$(\varphi П)(x)$ = «x>4»,

т. е. $П$ интерпретируется как тождественно ложный предикат. Символу $З$ поставим в соответствие произвольный двухместный предикат. Тогда формулы H_1 и H_2 истинны, поскольку посылки импликаций этих формул ложны при любом x. А формула H_3 ложна. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $x = 2$. Следовательно, рассуждение о первокурсниках нелогично.

Определение. Множество формул

$$K = \{F_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_l)\}$$

называется *выполнимым*, если существует интерпретация φ с областью M и элементы $a_1, \ldots, a_l \in M$ такие, что все высказывания $(\varphi F_1)(a_1, \ldots, a_l), \ldots, (\varphi F_m)(a_1, \ldots, a_l)$ истинны.

Множество формул $K = \{F_1 = (\forall x)(\exists y)(P(y) \mathbin{\&} Q(x, y)), F_2 = (\forall y)Q(c, y), F_3 = \neg P(c)\}$ выполнимо. Возьмем в качестве области интерпретации множество натуральных чисел N. Символы P, Q и c проинтерпретируем следующим образом:

$(\varphi P)(u)$ = «u – простое число»;

$(\varphi Q)(u, v)$ = «u меньше или равно v»;

$\varphi(c) = 1$.

Тогда высказывание φF_1 означает, что для любого натурального числа x найдется простое число y, которое не меньше x, высказывание φF_2 означает, что 1 – наименьшее натуральное число, а высказывание φF_3 означает, что 1 – непростое число. Ясно, что все эти высказывания истинны, и поэтому множество формул K выполнимо.

Понятия логического следствия и выполнимости в логике первого порядка связаны точно так же, как и в логике высказываний.

Теорема 3.2. Формула $G(x_1, \ldots, x_n)$ является логическим следствием формул $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда множество формул $\{F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n), \neg G(x_1, \ldots, x_n)\}$ невыполнимо.

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 1.2 и поэтому не приводится.

§ 6. Нормальные формы

Как и в логике высказываний, в логике первого порядка вводятся нормальные формы. Мы рассмотрим две из них: предваренную нормальную и сколемовскую нормальную формы.

Определение. Формула G имеет *предваренную нормальную форму* (сокращенно ПНФ), если

$$G = (Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)H,$$

где $Q_1, \ldots, Q_n$ – кванторы, а формула H не содержит кванторов.

Например, формула $(\forall x)(\exists y)(P(x, y)\&\neg Q(y))$ имеет предваренную нормальную форму, а формула $\neg(\forall x)(T(x)\&S(x, y))$ не имеет.

Теорема 3.3. Для всякой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая предваренную нормальную форму.

Доказательство теоремы легко следует из анализа алгоритма приведения к ПНФ.

Алгоритм приведения
к предваренной нормальной форме

Шаг 1. Используя законы 21 и 20, исключить эквиваленцию и импликацию.

Шаг 2. Занести отрицание к атомарным формулам, пользуясь законами 17–19 и 26–27.

Шаг 3. С помощью законов 22–23, 28–31 вынести кванторы вперед, используя при необходимости переименование связанных переменных (законы 32–33).

Рассмотрим пример. Пусть

$$F = (\forall x)P(x) \to (\exists y)(\forall z)(P(y) \;\&\; Q(y, z)).$$

Выполнив шаг 1 (с помощью закона 20), получим формулу

$$F_1 = \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists y)(\forall z)(P(y) \;\&\; Q(y, z)).$$

С помощью закона 26 перейдем к формуле

$$F_2 = (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists y)(\forall z)(P(y) \;\&\; Q(y, z)).$$

Тем самым шаг 2 также выполнен. Применим закон 30 $Q_1 = \exists$, $Q_2 = \exists$, $u = y$, получим формулу

$$F_3 = (\exists x)(\exists y)[\neg P(x) \vee (\forall z)(P(y) \vee Q(y, z))].$$

(Пользуемся тем, что $\neg P(x)$ не содержит y, а $(\forall z)(P(y) \,\&\, Q(y, z))$ не содержит x.) Так как формула $\neg P(x)$ не содержит z, применение закона 28 дает формулу

$$F_4 = (\exists x)(\exists y)(\forall z)[\neg P(x) \vee (P(y) \vee Q(y, z))].$$

Это и есть искомая формула, имеющая ПНФ и равносильная формуле F.

В рассмотренном примере выполнение шага 3 можно организовать по-другому. В формуле F_2 связанную переменную y заменим на переменную x (закон 33), получим формулу

$$F_3' = (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)(\forall z)(P(x) \,\&\, Q(x, z)).$$

Используя закон 23, перейдем к формуле

$$F_4' = (\exists x)[\neg P(x) \vee (\forall z)(P(x) \,\&\, Q(x, z))].$$

Затем, как и в предыдущем абзаце, с помощью закона 28 вынесем квантор по z за квадратную скобку. Получим формулу

$$F_5' = (\exists x)(\forall z)[\neg P(x) \vee (P(x) \,\&\, Q(x, z)].$$

Формула F_5', как и формула F_4, имеет предваренную нормальную форму и равносильна формуле F. В некоторых ситуациях формула F_5' предпочтительнее формулы F_4, поскольку содержит меньше кванторов. (Кстати, бескванторную часть формулы F_5' можно упростить.)

Перейдем к изучению сколемовской нормальной формы. Отметим вначале, что в логике первого порядка понятие конъюнктивной нормальной формы вводится точно так же, как и в логике высказываний. Полностью сохраняются алгоритм приведения к КНФ и утверждение теоремы 1.3.

Определение. Формула G имеет *сколемовскую нормальную форму* (сокращенно СНФ), если

$$G = (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)H,$$

где формула H не содержит кванторов и имеет конъюнктивную нормальную форму.

Например, формула $(\forall x)[P(x) \,\&\, (P(y) \vee Q(x, y))]$ имеет сколемовскую нормальную форму, а формулы $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ и $(\forall x)[P(x) \vee (P(y) \,\&\, Q(x, y)]$ не имеют.

В отличие от предыдущего случая предваренной нормальной формы мы здесь вначале рассмотрим алгоритм приведения к СНФ, а затем сформулируем теорему.

Алгоритм приведения
к сколемовской нормальной форме

Шаги 1–3 – те же, что и в предыдущем алгоритме.

Шаг 4. Бескванторную часть привести к конъюнктивной нормальной форме (алгоритм описан в § 5 главы 1).

Шаг 5. Исключить кванторы существования. Этот шаг изложим на примере. Пусть после выполнения шага 4 мы получили формулу

$$F = (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)H(x, y, z, u, v),$$

где H не содержит кванторов. Предположим, что она не содержит константы c, символов одноместной функции f и двухместной функции g. Тогда в формуле H заменим x на c, z – на $f(y)$, v заменим на $g(y, u)$. Все кванторы существования вычеркнем. Получим формулу

$$G = (\forall y)(\forall u)H(c, y, f(y), u, g(y, u)).$$

Это и есть результат выполнения шага 5.

Приведем пример приведения к СНФ. Пусть

$$F = (\exists x)(\forall y)[P(x, y) \to (\exists z)(Q(x, z) \,\&\, R(y))].$$

Применяя законы 20 и 23, получаем формулу

$$F_1 = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[\neg P(x, y) \vee (Q(x, z) \,\&\, R(y))].$$

Она имеет предваренную нормальную форму. Используя закон 12, приводим бескванторную часть к КНФ:

$$F_2 = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(\neg P(x, y) \vee Q(x, z)) \,\&\, (\neg P(x, y) \vee R(y))].$$

Сделав подстановку $x = a$, $z = f(y)$, получим искомую формулу

$$G = (\forall y)[(\neg P(a, y) \vee Q(a, f(y))) \,\&\, (\neg P(a, y) \vee R(y))].$$

Теорема 3.4. Для всякой формулы F существует формула G, имеющая сколемовскую нормальную форму и одновременно с F выполнимая или невыполнимая.

Доказательство. Пусть G – результат работы алгоритма приведения к СНФ. То, что результатом работы алгоритма является формула в сколемовской нормальной форме, ясно из описания алгоритма. Формула, которая получается после выполнения шагов 1–4, равносильна исходной и, в частности, одновременно с ней выполнима или невыполнима.

Проанализируем шаг 5. Предположим вначале, что исключается квантор существования, впереди которого нет кванторов общности. Можно считать, что это первый квантор в записи формулы, т. е.

$$E(u_1, \ldots, u_n) = (\exists y)E'(y, u_1, \ldots, u_n).$$

(Формула E' может содержать кванторы.) Рассмотрим интерпретацию φ с областью M, при которой формула E выполнима. Выполнимость означает, что найдутся элементы $a_1, \ldots, a_n \in M$ такие, что высказывание $(\varphi E)(a_1, \ldots, a_n)$ или (что тоже самое) высказывание $(\exists y)(\varphi E')(y, a_1, \ldots, a_n)$ истинно. Отсюда следует, что существует элемент $b \in M$ такой, что высказывание $(\varphi E')(b, a_1, \ldots, a_n)$ также истинно. Исключение квантора существования по y на пятом шаге приводит к формуле $D(u_1, \ldots, u_n) = E'(c, u_1, \ldots, u_n)$, где c – константа, отсутствующая в E'. Рассмотрим интерпретацию ψ, которая совпадает с φ на всех символах предикатов и функций, входящих в запись формулы F, и $\psi(c) = b$. Тогда $(\psi D)(a_1, \ldots, a_n) = (\varphi E')(b, a_1, \ldots, a_n)$. Мы доказали, что если формула E выполнима, то выполнима и формула D.

Предположим теперь, что выполнима формула

$$D(u_1, \ldots, u_n) = E'(c, u_1, \ldots, u_n).$$

Это означает, что существует интерпретация ψ с областью M и элементы $a_1, \ldots, a_n \in M$ такие, что высказывание $(\psi E')(\psi(c), a_1, \ldots, a_n)$ истинно. Но отсюда следует истинность высказывания $(\exists y)(\psi E)(y, a_1, \ldots, a_n)$. Следовательно, формула $E(u_1, \ldots, u_n)$ выполнима. Мы доказали, что из выполнимости формулы D следует выполнимость формулы E.

Рассмотрим теперь случай, когда исключается квантор существования, впереди которого есть k кванторов общности, т. е.

$$E(u_1, \ldots, u_n) = (\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\exists y)E'(x_1, \ldots, x_k, y, u_1, \ldots, u_n).$$

(Формула E' может содержать кванторы.) Исключение квантора по y на шаге 5 приведет к формуле

$$D(u_1, \ldots, u_n) =$$
$$= (\forall x_1)\ldots(\forall x_k)E'(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k), u_1, \ldots, u_n),$$

где f – символ k-местной функции, не содержащийся в E. Предположим, что формула E выполнима. Выполнимость означает существование интерпретации φ с областью M и элементов $a_1, \ldots, a_n \in M$ таких, что высказывание $(\varphi E)(a_1, \ldots, a_n)$ истинно. Истинность этого высказывания означает, что для любых элементов $x_1, \ldots, x_k \in M$ найдется элемент $y \in M$ такой, что высказывание $E'(x_1, \ldots, x_k, y, a_1, \ldots, a_n)$ истинно. Если для данных элементов $x_1, \ldots, x_k$ таких элементов y несколько, то зафиксируем один. Тем самым мы определили на M функцию i: $M\times\ldots\times M \to M$ такую, что высказывание

$$(\varphi E')(x_1, \ldots, x_k, i(x_1, \ldots, x_k), a_1, \ldots, a_n)$$

истинно для всех $x_1, \ldots, x_k \in M$. Рассмотрим интерпретацию ψ, которая совпадает с φ на всех символах функций и предикатов, входящих в запись формулы E, и $(\psi f)(x_1, \ldots, x_n) = i(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$(\psi D)(a_1, \ldots, a_n) =$$
$$= (\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\varphi E')(x_1, \ldots, x_k, i(x_1, \ldots, x_k), a_1, \ldots, a_n).$$

Последнее высказывание, как мы видели, истинно. Следовательно, формула $D(u_1, \ldots, u_n)$ выполнима. Мы показали, что из выполнимости формулы E следует выполнимость формулы D.

Пусть выполнима формула D. Это означает, что существует интерпретация ψ с областью M и элементы $a_1, \ldots, a_n \in M$ такие, что высказывание $(\psi D)(a_1, \ldots, a_n)$ или (что то же самое) высказывание

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\psi E')(x_1, \ldots, x_k, (\psi f)(x_1, \ldots, x_k), a_1, \ldots, a_n)$$

истинно. Отсюда следует, что для любых $x_1, \ldots, x_k$ найдется y (равный $(\varphi f)(x_1, \ldots, x_k)$) такой, что высказывание

$$(\psi E')(x_1, \ldots, x_k, y, a_1, \ldots, a_n)$$

истинно. Следовательно, истинно высказывание

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\exists y)(\psi E')(x_1, \ldots, x_k, y, a_1, \ldots, a_n),$$

т. е. высказывание $(\psi E)(a_1, \ldots, a_n)$. Мы доказали, что из выполнимости формулы D следует выполнимость формулы E.

Теорема доказана.

§ 7. Невыразимость в логике первого порядка

В примерах, рассмотренных в предыдущих параграфах, мы видели, что логика первого порядка обладает значительными выразительными возможностями. Данный параграф посвящен доказательству того, что выразительные возможности этой логики в определенном смысле ограничены.

Рассмотрим предварительно понятие транзитивного замыкания двухместного предиката.

Определение. Пусть $S(x, y)$ – двухместный предикат, заданный на множестве M. Предикат $S^*(x, y)$ называется *транзитивным замыканием* предиката $S(x, y)$, если для любых $a, b \in M$ выполняется условие: высказывание $S^*(a, b)$ истинно $\Leftrightarrow$ существует натуральное число n и элементы $c_0, \ldots, c_n$ множества M такие, что $a = c_0$, $c_n = b$ и все высказывания $S(c_0, c_1)$, $S(c_1, c_2)$, $\ldots$, $S(c_{n-1}, c_n)$ истинны.

Если предикат представлять отношением, то транзитивному замыканию предиката соответствует транзитивное замыкание бинарного отношения.

Рассмотрим пример. Пусть M – множество натуральных чисел, а $S(x, y)$ – предикат «x непосредственно предшествует y», т. е. «$y = x+1$». Тогда транзитивным замыканием предиката $S(x, y)$ будет предикат «x меньше y».

Оказывается, не существует формулы логики первого порядка, которая выражала бы транзитивное замыкание двухместного предиката. Более точная формулировка содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.5. Пусть P – символ двухместного предиката. Не существует формулы $F(x, y)$ логики первого порядка такой, что для любой интерпретации φ предикат $(\varphi F)(x, y)$ есть транзитивное замыкание предиката $(\varphi P)(x, y)$.

Доказательство теоремы 3.5 опирается на одно известное в логике первого порядка утверждение, которое называется теоремой компактности. В формулировке теоремы компактности используется понятие логического следствия бесконечного множества формул. Определение этого понятия легко получается из определения логического следствия множества формул $F_1, \ldots, F_k$ из § 6, и мы его приводить не будем.

Теорема компактности. Если формула G является логическим следствием бесконечного множества формул K, то G является логическим следствием некоторого конечного подмножества K' множества K.

Доказательство теоремы компактности будет приведено в следующей главе.

Приведем доказательство теоремы 3.5. Предположим противное: существует формула $F(x, y)$ логики первого порядка такая, что для любой интерпретации φ с областью M и любых $a, b \in M$ выполняется эквиваленция

$$(\varphi F)(a, b) \Leftrightarrow (\varphi P)^{+}(a, b).$$

Рассмотрим следующее множество формул

$K = \{E_0(x, y), E_1(x, y), \ldots, E_n(x, y), \ldots\}$:

$E_0(x, y) = \neg P(x, y)$,

$E_1(x, y) = \neg(\exists z_1)[P(x, z_1) \,\&\, P(z_1, y)]$,

$E_2(x, y) = \neg(\exists z_1)(\exists z_2)[P(x, z_1) \,\&\, P(z_1, z_2) \,\&\, P(z_2, y)]$,

...

$E_n(x, y) = \neg(\exists z_1)\ldots(\exists z_n)[P(x, z_1) \,\&\, P(z_1, z_2) \,\&\ldots\&\, P(z_n, y)]$,

...

Используя определение транзитивного замыкания и предположение о том, что формула $F(x, y)$ определяет транзитивное замыкание, получаем, что формула $\neg F(x, y)$ есть логическое следствие множества формул K. По теореме компактности $\neg F(x, y)$ есть логическое следствие некоторого конечного подмножества K' множества K. Можно считать, что

$$K' = \{E_0(x, y), E_1(x, y), \ldots, E_d(x, y)\}$$

для некоторого d.

Пусть $M = \{0, 1, \ldots, d+1, d+2\}$. На множестве M определим двухместный предикат S следующим образом:

$$S(u, v) \Leftrightarrow u+1 \text{ равно } v.$$

Например, высказывания $S(0, 1)$, $S(1, 2)$ истинны, а высказывание $S(0, 2)$ ложно. Отметим, что высказывание $S^+(0, d+2)$ истинно. Рассмотрим интерпретацию φ, для которой $(\varphi P)(u, v) = S(u, v)$. Все высказывания $(\varphi E_0)(0, d+2)$, $(\varphi E_1)(0, d+2)$, ..., $(\varphi E_d)(0, d+2)$ истинны. Так как формула $\neg F(x, y)$ есть логическое следствие множества формул K', истинно высказывание $\neg(\varphi F)(0, d+2)$. С другой стороны, поскольку $F(x, y)$ определяет транзитивное замыкание и истинно высказывание $S^+(0, d+2)$ (другими словами, высказывание $(\varphi P)^+(0, d+2)$), то истинно высказывание $(\varphi F)(0, d+2)$. Мы доказали, что истинно и последнее высказывание, и его отрицание. Полученное противоречие показывает, что не существует формулы логики первого порядка, определяющей транзитивное замыкание предиката.

Теорема доказана.

§ 8. Многосортная логика первого порядка

Расширим понятие формулы, введя так называемые ограниченные кванторы. Допустим, что нам надо записать на языке логики предикатов следующее утверждение: «для всякого $x>5$ существует $y>0$ такое, что $xy = 1$». Отметим, что здесь написано не «для всякого x» и «существует y», а «для всякого $x>5$» и «существует $y>0$». Если на это не обратить внимание, то получится формула $(\forall x)(\exists y)(xy = 1)$, имеющая другой смысл, нежели исходное утверждение. Для правильного перевода надо немного изменить исходное предложение по форме (не меняя, разумеется, смысла): «для всякого x справедливо, если $x>5$, то существует y такой, что $y > 0$ и $xy = 1$». Правильный перевод имеет вид $(\forall x)[x>5 \to$ $\to (\exists y)(y > 0 \ \& \ xy = 1)]$.

Если рассматривать более длинные исходные предложения, то соответствующие им формулы логики предикатов будут, вообще говоря, довольно громоздкими. Для того, чтобы частично избавиться от усложнения при переводе на язык логики предикатов, вводятся так называемые ограниченные кванторы. Пусть $B(x)$ - формула с одной свободной переменной x. Тогда выражение $\forall B(x)$ называется *ограниченным квантором общности*, $\exists B(x)$ – *ограниченным квантором существования*. С помощью ограниченных кванторов исходное предложение предыдущего абзаца можно записать довольно просто: $(\forall x>5)(\exists y>0)(xy = 1)$.

Более формально, ограниченные кванторы вводятся следующим образом: формула $(\forall B(x))F(x)$ есть сокращение формулы $(\forall x)(B(x)\to F(x))$, формула $(\exists B(x))F(x)$ – сокращение формулы $(\exists x)(B(x)\&F(x))$. Для ограниченных кванторов справедливы аналоги законов 22–33.

Ограниченные кванторы часто вводятся неявно. Для переменных, пробегающих множество истинности формулы $B(x)$, вводят специальное обозначение. Например, в геометрии довольно часто применяется следующее соглашение: буквами A, B, C, D, … обозначаются точки, буквами a, b, c, d, … – прямые, а буквами α, β, γ, … – плоскости, т. е., с нашей точки зрения, первые пробегают множество истинности формулы $T(x)$, вторые – $Пр(x)$, третьи $Пл(x)$.

Последовательное оформление этой идеи приводит к понятию многосортной (многоосновной) логики предикатов. Строгих определений давать не будем, укажем только отличие от обсуждавшейся ранее (одноосновной или односортной) логики предикатов. Исходными для построения формул также являются множества $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$. Только в этом случае переменные разбиты по сортам. В примере с геометрией таких сортов три: переменные, принимающие в качестве значений точки, прямые и плоскости. Далее, для каждого символа из $\boldsymbol{F}$ указано, какой сорт имеет первый аргумент, какой – второй и т. д., какой сорт имеет значение функции. Аналогичная информация имеется и для каждого символа предиката. Для интерпретации берется не одно множество, а столько, сколько сор тов переменных (эти множества называются основами). Для геометрии таких основ три: множество точек, множество прямых, множество плоскостей.

Приведем пример применения многоосновной логики предикатов. В этом примере будем использовать терминологию теории баз данных без пояснений. (По поводу этой терминологии см. книгу Дж. Ульмана из списка литературы.)

Рассмотрим информационную систему под условным названием «Сделки». Система содержит сведения о сделках купли-продажи, произведенных некоторой фирмой. Предметом сделок служат партии товаров, определяемые номером партии, наименованием товара, единицей измерения и количеством. Используются следующие атрибуты: НОМ – номер партии товара, НАИМ – наименование товара, ЕД – единица измерения, КОЛ – количество единиц товара в партии, ДАТА – дата сделки, АГЕНТ – покупатель или продавец, СЕК – номер секции склада, СРОК – срок годности. Информация хранится в виде отношений: ПАР (НОМ, НАИМ, ЕД, КОЛ), ПОК (НОМ, ДАТА, АГЕНТ), ПРОД (НОМ, ДАТА, АГЕНТ), СКЛАД (СЕК, НОМ, СРОК). Первое отношение содержит сведения о партиях товара, которые были предметом сделок, второе – сведения о покупках, третье – о продажах партий товара. В четвертом указывается, в какой секции склада хранится купленная (но еще не проданная) партия товара и срок годности товара в партии. Система может вычислять отношение РАН(x, y) = «x раньше y», определенное на доменах атрибутов ДАТА и СРОК.

Формализуем эту информационную систему в многоосновной логике предикатов следующим образом. Введем восемь сортов переменных (по количеству атрибутов), для каждого атрибута – свой сорт. Переменные будут принимать значения в доменах соответствующих атрибутов. Другими словами, области интерпретации (основы) будут состоять из доменов атрибутов. Переменные по сортам графически различать не будем. А для того, чтобы указать, что переменная x, например, изменяется по домену атрибута НАИМ, а y – по домену атрибута ЕД, будем писать: $x\in$НАИМ, $y\in$ЕД. Каждому отношению поставим в соответствие предикат той же местности, что и отношение, с соответствующими типами переменных. Предикат и отношение будем обозначать одинаково.

Например, отношению ПАР(НОМ, НАИМ, ЕД, КОЛ) будет соответствовать предикат ПАР(x, y, u, v), где $x \in$НОМ, $y \in$НАИМ, $u \in$ЕД, $v \in$КОЛ. Сигнатура Σ, таким образом, будет содержать 5 символов предикатов:

$$\Sigma = \{\text{ПАР}(x, y, u, v), \text{ПОК}(x, y, z), \text{ПРОД}(x, y, z), \text{СКЛАД}(x, y, z), \text{РАН}(x, y)\}.$$

В сигнатуру Σ можно добавлять константы, интерпретируемые как элементы доменов атрибутов.

Эта формализация позволяет запросы к информационной системе представлять формулами логики предикатов указанной сигнатуры. Рассмотрим следующий запрос:

Q_1. «Каковы номера партий товаров, купленных у фирмы β, и каково наименование товара в этих партиях?»

Запрашиваемая информация содержится в двух отношениях ПАР(НОМ, НАИМ, ЕД, КОЛ) и ПОК(НОМ, ДАТА, АГЕНТ), которые связаны номером партии товара, АГЕНТ есть фирма β. Если взять конъюнкцию предикатов

$$\text{ПАР}(x, y, u, v) \ \& \ \text{ПОК}(x, z, \beta),$$

то эта формула будет задавать пятиместный предикат, в котором, кроме запрашиваемой, будет содержаться информация о единицах, количестве единиц и дате сделок. Судя по запросу, эта дополнительная информация пользователя не интересует, поэтому на соответствующие переменные навесим кванторы существования. Получим формулу:

$$F_1(x, y) = x \in \text{НОМ} \ \& \ y \in \text{НАИМ} \ \& \ (\exists u \in \text{ЕД})(\exists v \in \text{КОЛ})(\exists z \in \text{ДАТА})[\text{ПАР}(x, y, u, v) \ \& \ \text{ПОК}(x, z, \beta)].$$

Формула $F_1(x, y)$ представляет собой перевод запроса Q_1 на язык многоосновной логики предикатов.

Рассмотрим еще ряд примеров перевода запросов на язык логики предикатов.

Q_2. «Каковы наименование товара, единицы измерения и количество единиц в партии товара, срок годности которого истекает 20.03.01?»

Q_3. «Для каких фирм срок годности товара, купленного у этих фирм, истекает 20.03.01?»

Q_4. «Какой товар хранится на складе более, чем в двух партиях?»

Q_5. «Какие из закупленных партий товаров впоследствии проданы?»

Эти запросы на язык логики предикатов будут переведены формулами F_2–F_5:

$$F_2(x, y, z) = x \in \text{НАИМ} \ \& \ y \in \text{ЕД} \ \& \ z \in \text{КОЛ} \ \&$$
$$(\exists u \in \text{СЕК})(\exists v \in \text{НОМ})(\exists w \in \text{СРОК})$$
$$[\text{ПАР}(v, x, y, z) \ \& \ \text{СКЛАД}(u, v, w) \ \& \ \text{РАН}(w, 20.03.01)],$$

$$F_3(x) = x \in \text{АГЕНТ} \ \& \ (\forall y \in \text{НОМ})(\forall z \in \text{ДАТА})(\forall u \in \text{СЕК})$$
$$(\forall v \in \text{СРОК})[\text{ПОК}(y, z, x) \ \& \ \text{СКЛАД}(u, y, v) \to$$
$$\text{РАН}(v, 20.03.01)],$$

$$F_4(x) = x \in \text{НАИМ} \ \& \ (\exists y_1, y_2 \in \text{НОМ})(\exists z_1, z_2 \in \text{ЕД})$$
$$(\exists u_1, u_2 \in \text{КОЛ})(\exists v_1, v_2 \in \text{СЕК})(\exists w_1, w_2 \in \text{СРОК})[y_1 \neq y_2 \ \&$$
$$\text{ПАР}(y_1, x, z_1, u_1) \ \& \ \text{СКЛАД}(v_1, y_1, w_1) \ \&$$
$$\text{ПАР}(y_2, x, z_2, u_2) \ \& \ \text{СКЛАД}(v_2, y_2, w_2)],$$

$$F_5(x) = x \in \text{НОМ} \ \& \ (\exists y \in \text{НАИМ})(\exists z \in \text{ЕД})(\exists u \in \text{КОЛ})$$
$$(\exists v_1, v_2 \in \text{ДАТА})(\exists w_1, w_2 \in \text{АГЕНТ})$$
$$[\text{ПАР}(x, y, z, u) \ \& \ \text{ПОК}(x, v_1, w_1) \ \& \ \text{ПРОД}(x, v_2, w_2) \ \&$$
$$\text{РАН}(v_1, v_2)].$$

Рассмотрим второй вариант выбора сигнатуры для формализации запросов Q_1–Q_5. Для этого вначале к имеющимся восьми основам (доменам восьми исходных атрибутов) добавим девятую основу: множество сделок – СДЕЛ. Далее, вместо предикатов ПАР(x, y, u, v), ПОК(x, y, z), ПРОД(x, y, z), СКЛАД(x, y, z) введем функции:

наим: НОМ → НАИМ,
ед: НОМ → ЕД,
кол: НОМ → КОЛ,
сдел: СДЕЛ → НОМ,
тип: СДЕЛ → {пок, прод},
дата: СДЕЛ → ДАТА,
агент: СДЕЛ → АГЕНТ,
сек: НОМ → СЕК,
срок: НОМ → СРОК,

а предикат РАН(x, y) оставим. Функции имеют естественный смысл. Например, функция *наим* номеру партии товара ставит в соответствие наименование товара в этой партии, функция *сдел* ставит в соответствие сделке номер партии товара, относительно которого эта сделка была заключена. (Считаем, что предметом одной сделки является одна партия товара.) Новую сигнатуру будем обозначать буквой Δ. К сигнатуре Δ, как и к $\sum$, можно добавлять константы. Тогда запросы Q_1–Q_5 будут переведены следующим образом:

$$G_1(x, y) = x \in \text{НОМ} \ \& \ y \in \text{НАИМ} \ \& \ y = \textit{наим}(x) \ \& \ (\exists z \in \text{СДЕЛ}) \\ [x = \textit{сдел}(z) \ \& \ \textit{тип}(z) = \text{пок} \ \& \ \textit{агент}(z) = \beta],$$

$$G_2(x, y, z) = x \in \text{НАИМ} \ \& \ y \in \text{ЕД} \ \& \ z \in \text{КОЛ} \ \& \ (\exists u \in \text{НОМ}) \\ [x = \textit{наим}(u) \ \& \ y = \textit{ед}(u) \ \& \ z = \textit{кол}(u) \ \& \ \text{РАН}(\textit{срок}(u), \\ 20.03.01)],$$

$$G_3(x) = x \in \text{АГЕНТ} \ \& \ (\forall y \in \text{НОМ})(\forall z \in \text{СДЕЛ})[\textit{сдел}(z) = \\ = y \ \& \ \textit{агент}(z) = x \to \text{РАН}(\textit{срок}(y), 20.03.01)],$$

$$G_4(x) = x \in \text{НАИМ} \ \& \ (\exists u_1, u_2 \in \text{НОМ})(\exists v_1, v_2 \in \text{СЕК})[\textit{наим}(u_1) = \\ = \textit{наим}(u_2) = x \ \& \ u_1 \neq u_2 \ \& \ \textit{сек}(u_1) = v_1 \ \& \ \textit{сек}(u_2) = v_2],$$

$$G_5(x) = x \in \text{НОМ} \ \& \ (\exists v_1, u_2 \in \text{СДЕЛ})[x = \textit{сдел}(u_1) \ \& \\ x = \textit{сдел}(u_2) \ \& \ \textit{тип}(u_1) = \textit{пок} \ \& \ \textit{тип}(u_2) = \textit{прод} \ \& \\ \text{РАН}(\textit{дата}(u_1), \textit{дата}(u_2))].$$

Сигнатуру $\sum$ можно назвать реляционной (или предикатной) а Δ – функциональной. Разумеется, возможны и другие варианты выбора сигнатуры.

Задачи

1. Установить, какой из кванторов определяется следующими выражениями: «для всякого x истинно $F(x)$», «$F(x)$ при произвольном x», «найдется x такой, что $F(x)$», «для подходящего x верно $F(x)$», «всегда имеет место $F(x)$», «каждый элемент обладает свойством F», «найдется, по крайней мере, один x такой, что $F(x)$», «существует не менее одного x такого, что $F(x)$», «свойство F присуще всем», «каким бы ни был x $F(x)$ истинно», «хотя бы для одного x верно $F(x)$».

2. Дана алгебраическая структура $<N; x \leq y>$. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma = (\leq)$:

а) «x меньше y»; б) «y равно $x+1$»;

в) «x равно 1»; г) «x равно 2»;

д) «y лежит между x и z».

3. Дана алгебраическая структура $<N; x|y>$. Показать, что следующие предикаты определяются формулами сигнатуры $\sigma = (|)$ ($x|y$ означает, что x делит y нацело):

а) «x равно 1»; б) «z есть НОД(x, y)»;

в) «z есть НОК(x, y)»; г) «x – простое число».

Можно ли определить предикаты «x – четное число», «x меньше y» формулой этой же сигнатуры?

4. Рассмотрим алгебраическую структуру $<N; x+y, xy, x \leq y>$. Для каждой из формул:

а) $(\forall y)(y \leq x \to x \leq y)$;

б) $(\exists y)(x = y+y)$;

в) $(\forall u)(\forall v)(x = uv \to x = u \vee x = v)$;

г) $(\exists y)(\forall z)(z \leq x \to x \leq z \vee z = y)$;

д) $y \leq z \;\&\; x \leq z \;\&\; (\forall u)(y \leq u \;\&\; x \leq u \to z \leq u)$

найти предикат из следующего списка, который эта формула определяет:

а) «x – простое число или x равно 1»;

б) «x – четное число»;

в) «x равно 1»;

г) «z есть наибольшее из чисел x и y»;

д) «x принадлежит $\{1, 2\}$».

5. На множестве M задан одноместный предикат $P(x)$. Выразить следующие утверждения формулами сигнатуры $\sigma = (P)$:

а) «существует не менее одного элемента x, удовлетворяющего предикату $P(x)$»;

б) «существует не более одного элемента x, удовлетворяющего предикату $P(x)$»;

в) «существует точно один элемент x, удовлетворяющий предикату $P(x)$»;

г), д), е) – утверждения а), б), в) с заменой «один» на «два».

6. Пусть M – множество всех точек, прямых и плоскостей трехмерного пространства. Рассмотрим алгебраическую систему $< M; x \in y, p(x), l(x), pl(x) >$, где $\in$ – отношение принадлежности, $p(x)$ означает, что x есть точка, $l(x)$ – x есть прямая, $pl(x)$ – x есть плоскость.

Выразить следующие предикаты формулами указанной сигнатуры:

а) «плоскости x и y имеют общую точку»;

б) «если плоскости x и y имеют общую точку, то они имеют общую прямую»;

в) «прямые x и y имеют общую точку»;

г) «прямые x и y параллельны»;

д) «прямые x, y и z образуют треугольник».

В формулах можно использовать ограниченные кванторы.

7. Подберите сигнатуру и представьте следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов.

7.1. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми второкурсниками, а некоторые из второкурсников – спортсмены. Следовательно, какие-то первокурсники знакомы с некоторыми спортсменами.

7.2. Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

7.3. Таможенные чиновники обыскивают всякого, кто въезжает в страну, кроме высокопоставленных лиц. Некоторые люди, способствующие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков. Никто из высокопоставленных лиц не способствовал провозу наркотиков. Следовательно, некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков.

8. Пусть $F(x, y) = P(x, y) \& (\exists z)(P(x, z) \& P(z, y))$ и $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x, y)$ при следующих интерпретациях:

а) $(\varphi P)(x, y)$ = «x меньше y»;

б) $(\varphi P)(x, y)$ = «x меньше или равно y»;

в) $(\varphi P)(x, y)$ = «x делит y нацело и $x \neq y$»;

г) $(\varphi P)(x, y)$ = «y равно $x+1$».

9. Пусть $F(x) = x \neq a \ \& \ (\forall y)(D(y, x) \to y{=}a \vee y{=}x)$ и $M = \{1, \ldots, 9\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x)$ при следующих интерпретациях:

а) $(\varphi D)(x)$ = «x делит y нацело», $\varphi(a) = 1$;

б) $(\varphi D)(x)$ = «x меньше или равно y», $\varphi(a) = 1$;

в) $(\varphi D)(x)$ = «x делит y нацело», $\varphi(a) = 2$.

10. Пусть $F(x) = P(x) \to Q(a, g(x))$, $M = \{0, 1\}$. Найти предикаты, которые соответствуют формуле $F(x)$ при следующих интерпретациях:

а) $P(x)$ = «x не равно 0», $Q(x, y)$ = «x меньше y», $a = 0$, $g(x) = x+1$;

б) $P(x)$ = «x не равно 1», $Q(x, y)$ = «x меньше y», $a = 0$, $g(x) = 0$;

в) $P(x)$ = «x не равно 1», $Q(x, y)$ = «x меньше y», $a = 1$, $g(x) = x+1$, где «+» – сложение по модулю 2.

11. Пусть $F(x) = P(x) \ \& \ (\text{«}y)(P(y) \to D(x, y))$, $M = \{2, 3, 4, 6, 9\}$. Найти предикаты, которые соответствуют $F(x)$ при следующих интерпретациях:

а) $P(x)$ = «x – простое число», $D(x, y)$ = «x меньше или равно y»;

б) $P(x)$ = «x – нечетное число», $D(x, y)$ = «x делит y»;

в) $P(x)$ = «x не равно 4», $D(x, y)$ = «x меньше или равно y».

Существуют ли интерпретации, при которых формуле $F(x)$ соответствуют предикаты: а) «$x = 4$», б) «x – четное число»?

12. Выяснить, будут ли равносильны следующие пары формул:

а) $(\forall x)(F(x) \vee G(x))$	и	$(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$;
б) $(\exists x)(F(x) \ \& \ G(x))$	и	$(\exists x)F(x) \ \& \ (\exists x)G(x)$;
в) $(\forall x)(F(x) \to G(x))$	и	$(\forall x)F(x) \to (\forall x)G(x)$;
г) $(\forall x)F(x) \to (\forall x)G(x)$	и	$(\exists x)(\forall y)(F(x) \to G(y))$;
д) $(\exists x)(F(x) \to G(x))$	и	$(\exists x)F(x) \to (\exists x)G(x)$;
е) $(\exists x)F(x) \to (\exists x)G(x)$	и	$(\forall x)(\exists y)(F(x) \to G(y))$;
ж) $(\exists x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$	и	$(\exists x)F(x) \leftrightarrow (\exists x)G(x)$;
з) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$	и	$(\forall x)F(x) \leftrightarrow (\forall x)G(x)$.

13. Доказать равносильность формул:

а) $F = \neg(\exists x)[(\forall y)P(x, y) \to (\forall z)(P(z, z) \vee Q(z))]$ и
$G = (\forall x)(\forall y)(\exists z)[P(x, y) \mathbin{\&} \neg P(z, z) \mathbin{\&} \neg Q(z)]$;

б) $F = \neg(\forall x)[T(x) \to (\exists y)(\forall z)(R(y, z) \mathbin{\&} T(z) \to R(z, z))]$ и
$G = (\exists x)(\forall y)(\exists z)[T(x) \mathbin{\&} \neg R(z, z) \mathbin{\&} \neg(R(y, z) \to \neg T(z))]$;

в) $F = (\forall x)[(\forall y)P(x, y) \to (\exists z)(P(x, z) \mathbin{\&} Q(z))]$ и
$G = (\forall x)(\exists u)[P(x, u) \to Q(u)]$;

г) $F = \neg(\exists x)[(\exists y)T(x, y) \to (\forall z)(S(x, z) \vee Q(z))]$ и
$G = (\forall x)(\exists y)(\exists z)[T(x, y) \mathbin{\&} \neg(\neg S(x, z) \to Q(z))]$;

д) $F = \neg(\forall x)[(\forall y)T(x, y) \to (\exists z)(T(x, z) \mathbin{\&} Q(z))]$ и
$G = (\exists x)(\forall u)(T(x, u) \mathbin{\&} \neg Q(u))$.

14. Привести к предваренной нормальной форме:

а) $(\forall x)F(x) \to (\forall y)G(y)$;

б) $(\exists x)F(x) \to (\exists x)G(x)$;

в) $(\forall x)F(x) \to (\exists y)G(y)$;

г) $(\exists x)F(x) \to (\forall y)G(y)$;

д) $(\forall x)P(x, y) \to (\exists z)[P(y, z) \vee (\forall u)(Q(u) \to P(z, z))]$.

15. Привести к сколемовской нормальной форме:

а) $(\exists x)[P(x) \mathbin{\&} (\forall y)(S(y) \to T(x, y))]$;

б) $(\forall x)[Q(x) \to (\exists y)(\forall u)(R(x, y) \mathbin{\&} S(y, u))]$;

в) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)[L(x, y, z) \mathbin{\&} M(z, u, v)]$;

г) $(\forall x)[(\forall y)P(x, y) \to (\exists z)(Q(x, z) \mathbin{\&} R(z))]$;

д) $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \to (\forall z)(Q(x, z) \vee P(z))]$;

е) $(\forall x)[(\exists y)P(x, y) \leftrightarrow (\exists z)Q(x, z)]$.

16. Показать, что в следующих случаях формула G не является логическим следствием множества формул K:

а) $G = (\forall x)\neg R(x)$,
$K = \{(\exists x)R(x) \to (\exists x)Q(x), \neg Q(a)\}$;

б) $G = (\forall x)R(x, x)$,
$K = \{(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \to R(y, x)), (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \mathbin{\&} R(y, z) \to R(x, z))\}$;

в) $G = (\exists x)(P(x) \mathbin{\&} \neg R(x))$,
$K = \{(\forall x)[P(x) \to (\exists y)(Q(y) \mathbin{\&} S(x, y))], (\exists x)[R(x) \mathbin{\&} (\forall y)(Q(y) \to \neg S(x, y)], (\exists x)P(x)\}$.

17. Дано утверждение: «Некоторые из первокурсников знакомы с кем-либо из спортсменов. Но ни один из первокурсников не знаком ни с одним любителем подледного лова». Какие из следующих утверждений будут следствием этого и почему:

а) «ни один спортсмен не является любителем подледного лова»;

б) «некоторые из спортсменов не являются любителями подледного лова»;

в) «найдется спортсмен, который любит подледный лов»?

18. Докажите нелогичность следующих рассуждений, построив интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

18.1. Все студенты нашей группы – члены клуба «Спартак». А некоторые члены клуба «Спартак» занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

18.2. Некоторые студенты нашей группы – болельщики «Спартака». А некоторые болельщики «Спартака» занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

18.3. Каждый первокурсник знаком с кем-либо из студентов второго курса. А некоторые второкурсники – спортсмены. Следовательно, каждый первокурсник знаком с кем-либо из спортсменов.

19. Рассмотрим информационную систему под условным названием «Кадры», которая содержит сведения о сотрудниках некоторой организации. Для представления информации используются атрибуты: ФАМ – фамилия сотрудника, ПОЛ – пол сотрудника, ВОЗР – возраст, ДОЛЖ – должность, НОМ – номер отдела (подразделения) этой организации. Сведения хранятся в виде двух отношений СОТР(ФАМ, НОМ, ДОЛЖ), АНК(ФАМ, ПОЛ, ВОЗР). Первое отношение содержит фамилии сотрудников, их должности и номера отделов, где работают эти сотрудники. Второе отношение хранит анкетные данные: фамилию, пол и возраст сотрудников. Кроме того, система может вычислять отношения МЕН(x, y) = «x меньше y», определенное на множестве натуральных чисел, точнее, на домене атрибута ВОЗР.

Формализуем систему «Кадры» в многоосновной логике предикатов. Введем пять сортов переменных (по количеству атрибутов), для каждого атрибута – свой сорт. Переменные будут принимать значения в доменах соответствующих атрибутов. Эти домены и будут являться основами. Переменные графически можно не различать, а область изменения переменной указывать с помощью принадлежности домену соответствующего атрибута. Каждому из отношений поставим в соответствие предикат той же местности, что и отношение, с соответствующими типами переменных. Сигнатура Σ будет содержать три символа предиката:

$$\Sigma = \{\text{СОТР}(x, y, z), \text{АНК}(x, y, z), \text{МЕН}(x, y)\}.$$

К Σ можно добавлять константы, интерпретируемые как элементы доменов.

Перевести следующие запросы на язык логики первого порядка сигнатуры Σ:

1) Кто из сотрудников-мужчин старше 40 лет?

2) Кто из сотрудников старше 40 лет и в каком отделе работает?

3) Кто из программистов старше 40 лет и в каком отделе работает?

4) В каких отделах все программисты моложе 40 лет?

5) В каких отделах работают пенсионеры?

6) В каких отделах все программисты – пенсионеры?

20. Рассмотрим предметную область, которую условно назовем «Механическая обработка деталей». Эта область состоит из следующих множеств: деталей, станков, операций, типов деталей, типов станков, типов операций, которые мы будем обозначать соответственно как ДЕТ, СТ, ОПЕР, ТИПДЕТ, ТИПСТ, ТИПОПЕР. Введем еще и множество моментов времени – ВРЕМЯ. Будем предполагать, что время измеряется в некоторых единицах, например, в минутах, и отождествим множество ВРЕМЯ с множеством натуральных чисел. Зафиксируем сигнатуру, состоящую из предиката $\leq$ и функции $+$ на множестве ВРЕМЯ и следующих одноместных функций:

дет: ОПЕР → ДЕТ; *ст:* ОПЕР → СТ;
нач: ОПЕР → ВРЕМЯ; *кон:* ОПЕР → ВРЕМЯ;
типдет: ДЕТ → ТИПДЕТ; *типст:* СТ → ТИПСТ;
типопер: ОПЕР → ТИПОПЕР.

В сигнатуру можно добавлять константы, интерпретируемые как элементы указанных множеств. Например, *ствал* – ступенчатый вал (элемент множества ТИПДЕТ), *фрст* – фрезерный станок (элемент множества ТИПСТ), *токобр* – токарная обработка (элемент множества ТИПОПЕР), 6 – шесть моментов времени (шесть минут), *дет1* – деталь 1, *ст2* – станок 2, *опер3* – операция 3.

Записать в виде формул многосортной логики предикатов следующие предложения (обозначения сортов переменных не зафиксированы, поэтому для того, чтобы ограничить область изменения переменной x, скажем, множеством деталей, можно употреблять запись $x \in$ДЕТ):

1) Деталь *дет1* обрабатывается на станке *ст2*.

2) Операция *опер1* совершается над деталью *дет2* в течение 10 моментов времени.

3) Фрезерование шлицев длится 6, а фрезерование резьбы 9 моментов времени.

4) Токарная обработка ступенчатого вала длится 10 моментов времени.

5) Операция *опер3* совершается на фрезерном станке в течение 6 моментов времени.

6) Каждая деталь должна сначала пройти фрезерование торцов, а затем – фрезерование шлицев.

7) Каждый вал со шлицами должен сначала пройти токарную обработку, а затем фрезерование шлицев.

8) До операции «долбление зубьев» вал-шестерня должен пройти токарную обработку.

9) Первая операция для всех деталей – фрезерование торцов.

10) Последняя операция для всех типов деталей – фрезерование резьбы или закалка.

11) Между операциями фрезерования торцов и фрезерования резьбы проводится токарная обработка.

21. Операции *дет, ст, нач, кон, типопер* из предыдущей задачи заменим на предикат ОПЕР(ДЕТ, СТ, ВРНАЧ, ВРКОН, ТИПОПЕР), где ВРНАЧ и ВРКОН – время начала и окончания операции. Предикат $\leq$ и функции +, *типдет, типст* оставим. Записать формулами измененной сигнатуры утверждения 1, 3–4, 6–11.

22. Рассмотрим предметную область, которую можно назвать «Учеба на факультете». Для представления информации об этой предметной области введем два языка многосортной логики предикатов. Первый содержит следующие имена основных множеств: СТУД, ПРЕП, ПРЕД, ГР, КУРС, АУД, ДЕНЬ, НАЧ, которые интерпретируются соответственно как множества студентов, преподавателей, изучаемых предметов, групп, курсов, аудиторий, рабочих дней недели, времени начала занятий. На этих множествах заданы предикаты ГР(СТУД, ГР), КУРС(ГР, КУРС), РАСП(НАЧ, ДЕНЬ, ГР, ПРЕД, ПРЕП, АУД), РАНЬШЕ(НАЧ, НАЧ). Первый определяет принадлежность студента группе, второй – группы курсу, третий представляет собой факультетское расписание на неделю (предполагается, что нет поточных лекций, лабораторных занятий с частью группы и что все занятия проводятся каждую неделю). Последний предикат определяет, когда одно занятие проводится раньше другого по времени (в течение одного дня). В сигнатуру можно добавлять константы, которые интерпретируются как элементы указанных множеств. Например, *иванов* – студент, *петров* – преподаватель, *мт-101* – группа, *9.00* – начало занятий, *физкуль* – физкультура.

Второй язык, кроме указанных выше имен основных множеств, содержит множество ЗАН, которое интерпретируется как множество занятий на факультете, т. е. как объединение множеств занятий, проведенных в группах факультета за неделю. Сигнатура второго языка содержит прежний предикат РАНЬШЕ (НАЧ, НАЧ) и следующие одноместные функции:

нач: ЗАН $\to$ НАЧ;	*день*: ЗАН $\to$ ДЕНЬ;
гр: ЗАН $\to$ ГР;	*пред*: ЗАН $\to$ ПРЕД;
преп: ЗАН $\to$ ПРЕП;	*ауд*: ЗАН $\to$ АУД;
номгр: СТУД $\to$ ГР;	*номк*: ГР $\to$ КУРС

с естественной интерпретацией. Например, функция *нач* ставит в соответствие занятию время его начала, а функция *пред* – предмет, который изучается на этом занятии.

Перевести на каждый из языков следующие утверждения:

1) Один и тот же преподаватель не может в одно и то же время проводить занятия в разных аудиториях.

2) Два занятия по одному предмету в один и тот же день не проводятся.

3) Занятия физкультурой проводятся сразу во всех группах.

4) В течение недели проводятся два занятия физкультурой.

5) Занятия физкультурой проводятся последней парой.

6) В субботу проводится не более трех занятий.

7) У каждой группы 4 и 5 курсов есть день, свободный от аудиторных занятий.

8) В группе *мт-101* каждый день есть не менее трех занятий.

9) Если в группе в какой-то день есть занятие, то есть, по крайней мере, еще одно занятие.

23. Рассмотрим предметную область, которую условно назовем «Аэропорт». Выбрать сигнатуру многосортной логики для представления следующей информации о (недельном) расписании движения самолетов и выразить указанные утверждения формулами:

1) В Москву каждый день выполняется не менее трех рейсов.

2) В Ростов есть, по крайней мере, три рейса в неделю.

3) Нет двух рейсов до Минеральных Вод в один день.

4) В понедельник рейс до Краснодара выполняется раньше рейса до Ростова.

5) Первый рейс до Москвы выполняется раньше рейса до Ростова.

6) Между первыми двумя рейсами до Москвы есть рейс до Новосибирска.

Каким образом можно расширить выбранную сигнатуру, чтобы представить следующую информацию о промежуточных посадках:

7) Рейс до Якутска имеет две посадки.

8) Ни один рейс не имеет более трех посадок.

Ответы, указания и решения

2. Приведем соответствующие формулы:

а) $x \leq y \ \& \ \neg y \leq x$;

б) $x < y \ \& \ (\forall z)(x < z \ \& \ z \leq y \rightarrow z = y)$;

в) $(\forall y)(x \leq y)$;

г) $(\exists z)(\forall y)[z \leq y \ \& \ (\forall u)(z<u \ \& \ u \leq x \to u=x)]$;

д) $(x<y \ \& \ y<z) \vee (z<y \ \& \ y<x)$.

3. Приведем соответствующие формулы:

а) $(\forall y)(x|y)$;

б) $z|x \ \& \ z|y \ \& \ (\forall u)(u|x \ \& \ u|y \to u|z)$;

в) $x|z \ \& \ y|z \ \& \ (\forall u)(x|u \ \& \ y|u \to z|u)$;

г) $\neg(x=1) \ \& \ (\forall y)(y|x \to y=1 \vee y=x)$.

Предикаты «x – четное число» и «x меньше y» невыразимы формулой сигнатуры σ. Докажем это. Пусть P – множество простых чисел. Рассмотрим отображение φ: $P \to P$ такое, что $\varphi(2) = 3$, $\varphi(3) = 2$ и $\varphi(p) = p$ для всех простых чисел p, отличных от 2 и 3. Отображение φ расширим на все множество натуральных чисел N следующим образом: пусть $n = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\gamma_1} \ldots p_k^{\gamma_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ – простые числа, отличные от 2 и 3. Положим:

$$\varphi(n) = 3^\alpha 2^\beta p_1^{\gamma_1} \ldots p_k^{\gamma_k} \quad \text{и} \quad \varphi(1) = 1.$$

Например, $\varphi(2) = 3$, $\varphi(12) = 18$, $\varphi(42) = 42$, $\varphi(60) = 90$. Отображение φ сохраняет предикат делимости. Это означает, что

$$u|v \Leftrightarrow \varphi(u)|\varphi(v)$$

для любых $u, v \in N$. Индукцией по построению формулы можно доказать, что для любой формулы $F(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ и любых натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ высказывание $F(a_1, \ldots, a_n)$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $F(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. Предположим теперь, что предикат «x – четное число» определяется формулой $G(x)$. Тогда высказывание $G(2)$ истинно тогда и только тогда, когда $G(3)$ истинно. Но $G(2)$ истинно, а $G(3)$ ложно. Полученное противоречие доказывает, что предикат «x – четное число» невыразим формулой сигнатуры σ. Аналогично доказывается невыразимость предиката «x меньше y».

4. Соответствие формул предикатам содержится в следующей таблице:

Формула	а)	б)	в)	г)	д)
Предикат	в)	б)	а)	д)	г)

5. Приведем соответствующие формулы:

а) $(\exists x)P(x)$;

б) $(\forall x)(\forall y)(P(x) \,\&\, P(y) \to x{=}y)$;

в) $(\exists x)[P(x) \,\&\, (\forall y)(P(y) \to x{=}y)]$;

г) $(\exists x)(\exists y)[x{\neq}y_2 \,\&\, P(x) \,\&\, P(y)]$;

д) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[P(x) \,\&\, P(y) \,\&\, P(z) \to x{=}y \vee x{=}z \vee y{=}z]$;

е) $(\exists x)(\exists y)[x{\neq}y \,\&\, P(x) \,\&\, P(y) \,\&\, (\forall z)(P(z) \to x{=}z \vee y{=}z)]$.

6. Приведем соответствующие формулы:

а) $pl(x) \,\&\, pl(y) \,\&\, (\exists z)(p(z) \,\&\, z{\in}x \,\&\, z{\in}y)$;

б) $pl(x) \,\&\, pl(y) \,\&\, [(\exists z)(p(z) \,\&\, z{\in}x \,\&\, z{\in}y) \to (\exists u)(l(u) \,\&\, u{\in}x \,\&\, u{\in}y)]$;

в) $l(x) \,\&\, l(y) \,\&\, (\exists z)(p(z) \,\&\, z{\in}x \,\&\, z{\in}y)$;

г) $l(x) \,\&\, l(y) \,\&\, (\exists u)(pl(u) \,\&\, x{\in}u \,\&\, y{\in}u) \,\&\, \neg(\exists v)(p(v) \,\&\, v{\in}x \,\&\, v{\in}y)$;

д) $l(x) \,\&\, l(y) \,\&\, l(z) \,\&\, (\exists u)(\exists v)(\exists w)[p(u) \,\&\, p(v) \,\&\, p(w) \,\&\, u{\in}x \,\&\, u{\in}y \,\&\, v{\in}x \,\&\, v{\in}z \,\&\, w{\in}y \,\&\, w{\in}z \,\&\, u{\neq}v \,\&\, u{\neq}w \,\&\, v{\neq}w]$.

7. Приведем решение задачи 7.3. Пусть $T(x)$ означает «x – таможенник», $B(x)$ – «x въезжает в страну», $Л(x)$ – «x высокопоставленное лицо», $H(x)$ – «x способствует провозу наркотиков», $O(x, y)$ – «x обыскивает y». Тогда рассуждение 7.3 может быть переведено на язык логики первого порядка следующим образом:

$F_1 = (\forall x)[B(x) \,\&\, \neg Л(x) \to (\exists y)(T(y) \,\&\, O(y, x))]$,

$F_2 = (\exists x)[B(x) \,\&\, H(x) \,\&\, (\forall y)(O(y, x) \to H(y))]$,

$F_3 = \neg(\exists x)[Л(x) \,\&\, H(x))]$,

$G = (\exists x)(T(x) \,\&\, H(x))$.

8. Формуле $F(x, y)$ соответствуют следующие предикаты:

а) «x меньше y и между ними находится в точности один элемент»;

б) «x меньше или равно y»;

в) «x=1 и y=4»;

г) «$x{\neq}x$», т. е. тождественно ложный предикат.

9. Формуле $F(x)$ соответствуют следующие предикаты:

а) «x – простое число»; б) «x равно 2»;

в) «x равно 1».

10. Формуле $F(x)$ соответствуют следующие предикаты:

а) «x равно 0»; б) «x равно 1»;

в) «x равно 1».

11. Формуле $F(x)$ соответствуют следующие предикаты:

а) «x равно 2»; б) «x равно 3»;

в) «x равно 2».

Предикат «x равно 4» соответствует формуле $F(x)$ при интерпретации $P(x)$ = «x равно 4», $D(x, y)$ = «x больше или равно y», а предикат «x – четное число» соответствует этой формуле при интерпретации $P(x)$ = «x – четное число» и $D(x, y)$ = «x равно x».

12. Формулы равносильны только в случаях г) и е).

13. Приведем решение задачи 13в). Пусть

$$F = (\forall x)[(\forall y)P(x, y) \to (\exists z)(P(x, z) \;\&\; Q(z))] \quad \text{и}$$
$$G = (\forall x)(\exists u)[P(x, u) \to Q(u)].$$

Применим к формуле F последовательно законы 20 и 26, получим формулу

$$F_1 = (\forall x)[(\exists y)\neg P(x, y) \vee (\exists z)(P(x, z) \;\&\; Q(z))].$$

Затем, пользуясь законом 33, в формуле $(\exists y)\neg P(x, y)$ переменную y заменим на переменную u, а в формуле $(\exists z)(P(x, z) \;\&\; Q(z))$ переменную z заменим тоже на u. Формула F_1 после этих замен превратится в формулу

$$F_2 = (\forall x)[(\exists u)\neg P(x, u) \vee (\exists u)(P(x, u) \;\&\; Q(u))].$$

Применив закон 23, вынесем квантор вперед:

$$F_3 = (\forall x)(\exists u)[\neg P(x, u) \vee (P(x, u) \;\&\; Q(u))].$$

Используя последовательно законы 12, 16 и 1, получим формулу

$$F_4 = (\forall x)(\exists u)[\neg P(x, u) \vee Q(u)].$$

Осталось заметить, что в силу закона 20 формула $\neg P(x, u) \vee Q(u)$ равносильна формуле $P(x, u) \to Q(u)$. Равносильность F и G доказана.

14. Указание. Воспользоваться алгоритмом приведения к ПНФ (см. § 6).

15. Указание. Воспользоваться алгоритмом приведения к СНФ (см. § 6).

16. Приведем решение задачи 16в). Надо построить интерпретацию, при которой формулы из K истинны, а формула из G ложна. Рассмотрим множество $M = \{1, 2, 3\}$ и интерпретацию φ: $(\varphi P)(x)$ = «x равно 1», $(\varphi Q)(x)$ = «x равно 2», $(\varphi R)(x)$ = «x равно 1 или x равно 2», $(\varphi S)(x, y)$ = «x равно 1 и y равно 2». Легко проверить, что φ – искомая интерпретация.

17. Логическим следствием будет только утверждение б).

18. Приведем решение задачи 18.1. Пусть $St(x)$ означает, что «x – студент нашей группы», $M(x)$ – «x является членом клуба "Спартак"», $Sp(x)$ – «x занимается спортом». Тогда рассуждение 18.1 переводится на язык логики первого порядка последовательностью формул:

$$F_1 = (\forall x)(St(x) \to M(x)),$$
$$F_2 = (\exists x)(M(x) \mathbin{\&} Sp(x)),$$
$$G = (\exists x)(St(x) \mathbin{\&} Sp(x)).$$

Рассмотрим множество $M = \{1, 2, 3\}$ и интерпретацию φ: $(\varphi St)(x)$ = «x равно 1», $(\varphi M)(x)$ = «x равно 1 или x равно 2», $(\varphi Sp)(x)$ = = «x равно 2». Легко видеть, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = 1$ и $\varphi(G) = 0$.

Глава 4
МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ

Глава посвящена рассмотрению метода доказательства того, что формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, ..., F_k$. Этот метод называется *методом резолюций*. Отметим, что задача о логическом следствии сводится к задаче о выполнимости. Действительно, формула G есть логическое следствие формул F_1, $F_2, ..., F_k$ тогда и только тогда, когда множество формул $\{F_1, F_2, ..., F_k, \neg G\}$ невыполнимо. Метод резолюций, если говорить более точно, устанавливает невыполнимость. Это первая особенность метода. Вторая особенность метода состоит в том, что он оперирует не с произвольными формулами, а с дизъюнктами (или элементарными дизъюнкциями).

§ 1. Метод резолюций в логике высказываний

Рассмотрим вначале логику высказываний. Напомним, что литералом мы назвали атомарную формулу или ее отрицание, дизъюнктом – дизъюнкцию литералов. Дизъюнкт может состоять из одного литерала. *На дизъюнкт мы иногда будем смотреть, как на множество литералов,* т. е. не будем различать дизъюнкты, которые получаются один из другого с помощью коммутативности и ассоциативности дизъюнкции, а также идемпотентности. Последнее означает, например, что дизъюнкты $X\vee\neg Y\vee X$ и $X\vee\neg Y$ равны. Нам понадобится особый дизъюнкт – *пустой*, т. е. дизъюнкт, не содержащий литералов. Его мы будем обозначать символом []. Будем считать, что пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации. Это означает, что формула F&[] равносильна [], а формула $F\vee$[] равносильна F. Пустой дизъюнкт есть фактически то же самое, что и атомарная формула 0, но в контексте метода резолюций принято использовать [].

Определение. Литералы L и $\neg L$ называются *противоположными*.

Метод резолюций в логике высказываний основан на правиле резолюций.

Определение. *Правилом резолюций в логике высказываний* называется следующее правило: из дизъюнктов $X \lor F$ и $\neg X \lor G$ выводим дизъюнкт $F \lor G$.

Например, из дизъюнктов $\neg X \lor Y \lor Z$ и $X \lor \neg Y$ выводим дизъюнкт $Y \lor Z \lor \neg Y$. Обратим внимание на то, что в первых двух дизъюнктах есть еще одна пара противоположных литералов. Условимся, что можно применять правило резолюций не обязательно к самым левым литералам (поскольку мы не различаем дизъюнкты, отличающиеся порядком записи литералов). Тогда правило резолюций, примененное к Y и $\neg Y$ в дизъюнктах $\neg X \lor Y \lor Z$ и $X \lor \neg Y$, даст $\neg X \lor Z \lor X$.

Определение. Пусть S – множество дизъюнктов. *Выводом* из S называется последовательность дизъюнктов

$$D_1, D_2, \ldots, D_n$$

такая, что каждый дизъюнкт этой последовательности принадлежит S или следует из предыдущих по правилу резолюций. Дизъюнкт D *выводим из* S, если существует вывод из S, последним дизъюнктом которого является D.

Например, если $S = \{\neg X \lor Y \lor Z, \neg Y \lor U, X\}$, то последовательность $D_1 = \neg X \lor Y \lor Z$, $D_2 = \neg Y \lor U$, $D_3 = \neg X \lor Z \lor U$, $D_4 = X$, $D_5 = Z \lor U$ – вывод из S. Дизъюнкт $Z \lor U$ выводим из S.

Применение метода резолюций основано на следующем утверждении, которое называется теоремой о полноте метода резолюций.

Теорема 4.1. Множество дизъюнктов логики высказываний S невыполнимо тогда и только тогда, когда из S выводим пустой дизъюнкт.

Доказательство. Отметим, что правило резолюций сохраняет истинность. Это означает, что если $\varphi(\neg X \lor F) = 1$ и $\varphi(X \lor G) = 1$ для некоторой интерпретации φ, то $\varphi(F \lor G) = 1$. Действительно, пусть $\varphi(\neg X \lor F) = 1$ и $\varphi(X \lor G) = 1$. Тогда если $\varphi(F) = 1$, то и $\varphi(F \lor G) = 1$.

Если же $\varphi(F) = 0$, то $\varphi(\neg X) = 1$, поскольку $\varphi(\neg X \vee F) = 1$. Но в этом случае $\varphi(X) = 0$ и $\varphi(G) = 1$, так как $\varphi(X \vee G) = 1$. Если же $\varphi(G) = 1$, то и $\varphi(F \vee G) = 1$.

Докажем вначале достаточность.

Пусть из S выводим пустой дизъюнкт. Предположим противное: множество S выполнимо, т. е. существует интерпретация ψ, при которой все дизъюнкты из S истинны. Выводимость пустого дизъюнкта из S означает, что существует последовательность дизъюнктов $D_1, \ldots, D_n = []$, каждый дизъюнкт которой принадлежит S или получается из предыдущих по правилу резолюций. Если дизъюнкт D_i из этой последовательности принадлежит S, то по предположению $\psi(D_i) = 1$. Если же он получается из предыдущих по правилу резолюций, то также $\psi(D_i) = 1$, поскольку правило резолюций сохраняет истинность. При $i = n$ получаем, что $\psi([]) = 1$. Противоречие показывает, что предположение о выполнимости множества S – ложное предположение. Следовательно, S невыполнимо. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Доказательство проведем индукцией по следующему параметру $d(S)$: это сумма числа вхождений литералов в дизъюнкты из S минус число дизъюнктов.

Пусть множество дизъюнктов S невыполнимо. Если пустой дизъюнкт принадлежит S, то он выводим из S (вывод в этом случае состоит из одного пустого дизъюнкта) и необходимость теоремы доказана. Будем считать в силу этого, что $[] \notin S$. При этом предположении каждый дизъюнкт содержит хотя бы один литерал и поэтому $d(S) \geq 0$.

База индукции: $d(S) = 0$. Если $d(S) = 0$, то все дизъюнкты состоят из одного литерала. Поскольку множество S невыполнимо, то в нем должна найтись пара противоположных литералов X и $\neg X$. В таком случае пустой дизъюнкт выводим из S, соответствующий вывод содержит три дизъюнкта: X, $\neg X$, $[]$.

Шаг индукции: $d(S) > 0$. Предположим, что для любого множества дизъюнктов T такого, что $d(T) < d(S)$, необходимость теоремы доказана. Пусть

$$S = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, D_k\}.$$

Так как $d(S) > 0$, то в S существует хотя бы один неодноэлементный дизъюнкт. Будем считать, что это дизъюнкт D_k, т. е. $D_k = L \vee D_k'$, где L – литерал и $D_k^{\prime} \neq []$. Наряду с множеством дизъюнктов S рассмотрим еще два множества дизъюнктов

$$S_1 = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, L\},$$
$$S_2 = \{D_1, D_2, \ldots, D_{k-1}, D_k^{\prime}\}.$$

Ясно, что S_1 и S_2 невыполнимы и что $d(S_1)<d(S)$ и $d(S_2)<d(S)$. По предположению индукции из S_1 и S_2 выводим пустой дизъюнкт. Пусть

$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_{l-1}, A_l = []$ – вывод пустого дизъюнкта из S_1 (1)

и

$B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_{m-1}, B_m = []$ – вывод пустого дизъюнкта из S_2.(2)

Если в первом выводе не содержится дизъюнкта L, то эта последовательность дизъюнктов будет выводом из S и необходимость теоремы доказана. Будем считать, что L содержится в первом выводе, пусть $A_i = L$. Аналогично предполагаем, что $B_j = D_k^{\prime}$.

Если дизъюнкт E получается из дизъюнктов E_1 и E_2 по правилу резолюций, то будем говорить, что E *непосредственно зависит от* E_1 и от E_2. Транзитивное замыкание отношения непосредственной зависимости назовем *отношением зависимости*. (Другими словами, E зависит от $E^{\prime}$, если существуют дизъюнкты $E_1, \ldots, E_n$ такие, что $E = E_1$, $E_n = E^{\prime}$, и E_1 непосредственно зависит от E_2, E_2 непосредственно зависит от E_3, …, E_{n-1} непосредственно зависит от E_n.) Преобразуем второй вывод следующим образом: к дизъюнкту B_j и всем дизъюнктам, которые от него зависят, добавим литерал L. Новая последовательность дизъюнктов

$$B_1, B_2, \ldots, B_j^{\prime} = D_k^{\prime} \vee L, B^{\prime}_{j+1}, \ldots, B_m^{\prime} \tag{3}$$

будет выводом из S. Если дизъюнкт B_m не зависит от B_j, то $B_m^{\prime} = []$. Это означает, что из S выводим пустой дизъюнкт, что и требовалось доказать. Предположим, что B_m зависит от B_j. Тогда $B_m^{\prime} = L$. Преобразуем теперь первый вывод: на место дизъюнкта A_i (равного L) в этой последовательности подставим последовательность (3). Получим последовательность

$$A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1, \ldots, B_j^{\prime}, B^{\prime}_{j+1}, \ldots, B_m^{\prime} = L, A_{i+1}, \ldots, A_l = [].$$

Эта последовательность является выводом пустого дизъюнкта из множества дизъюнктов S. Следовательно, если множество S невыполнимо, то из S выводим пустой дизъюнкт.

Теорема доказана.

Для доказательства того, что формула G является логическим следствием множества формул $F_1, \ldots, F_k$, метод резолюций применяется следующим образом.

Сначала составляется множество формул $T = \{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}$. Затем каждая из этих формул приводится к конъюнктивной нормальной форме, и в полученных формулах зачеркиваются знаки конъюнкции. Получается множество дизъюнктов S. И наконец, ищется вывод пустого дизъюнкта из S. Если пустой дизъюнкт выводим из S, то формула G является логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_k$. Если из S нельзя вывести [], то G не является логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_k$.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Покажем, что формула $G = Z$ является логическим следствием формул $F_1 = \neg X \vee Y \to X \& Z$, $F_2 = \neg Y \to Z$. Сформируем множество формул $T = \{F_1, F_2, \neg G\}$. Приведем формулы F_1 и F_2 к КНФ (формула $\neg G$ сама имеет эту форму). Мы получим, что

F_1 равносильна $X \& (\neg Y \vee Z)$,
F_2 равносильна $Y \vee Z$.

Тогда множество дизъюнктов S равно

$$\{X, \neg Y \vee Z, Y \vee Z, \neg Z\}.$$

Из множества S легко выводится пустой дизъюнкт:

$$\neg Y \vee Z, \neg Z, \neg Y, Y \vee Z, Y, [].$$

Следовательно, формула G является логическим следствием формул F_1 и F_2.

§ 2. Подстановка и унификация

Рассмотрим метод резолюций в логике первого порядка. Относительно переменных в дизъюнктах будем предполагать, что они связаны кванторами общности, но сами кванторы писать не будем. Отсюда следует, что две одинаковые переменные в разных дизъюнктах можно считать различными.

Заметим прежде всего, что в логике первого порядка правило резолюций в прежнем виде уже не годится. Действительно, множество дизъюнктов $S = \{P(x), \neg P(a)\}$ невыполнимо (так как предполагается, что переменная x связана квантором общности). В то же время, если использовать правило резолюций для логики высказываний, то из S пустого дизъюнкта не получить. Содержательно понятно, что именно в этом случае надо сделать. Поскольку дизъюнкт $P(x)$ можно прочитать «для любого x истинно $P(x)$», ясно, что $P(x)$ истинно будет и для $x = a$. Сделав подстановку $x = a$, получим множество дизъюнктов $S' = \{P(a), \neg P(a)\}$. Множества S и S' одновременно выполнимы или невыполнимы. Но из S' пустой дизъюнкт с помощью прежнего правила резолюций выводится тривиальным образом. Этот пример подсказывает, что в логике первого порядка правило резолюций надо дополнить возможностью делать подстановку.

Дадим необходимые определения.

Определение. *Подстановкой* называется множество равенств

$$\sigma = \{x_1 = t_1, x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n\},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различные переменные, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, причем терм t_i не содержит переменной x_i ($1 \le i \le n$).

Если $\sigma = \{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\}$ – подстановка, а F – дизъюнкт, то через $\sigma(F)$ будем обозначать дизъюнкт, полученный из F *одновременной* заменой x_1 на t_1, x_2 на t_2 и т. д., x_n на t_n. Например, если $\sigma = \{x_1 = f(x_2), x_2 = c, x_3 = g(x_4)\}$, $F = R(x_1, x_2, x_3) \vee \neg P(f(x_2))$, то $\sigma(F) = R(f(x_2), c, g(x_4)) \vee \neg P(f(c))$. Аналогично определяется действие подстановки на терм.

Для удобства введем еще и *пустую подстановку* – подстановку, не содержащую равенств. Пустую подстановку будем обозначать через ε.

Определение. Пусть $\{E_1, \ldots, E_k\}$ – множество литералов или множество термов. Подстановка σ называется *унификатором* этого множества, если $\sigma(E_1) = \sigma(E_2) = \ldots = \sigma(E_k)$. Множество *унифицируемо*, если существует унификатор этого множества.

Например, множество атомарных формул

$$\{Q(a, x, f(x)), Q(u, y, z)\}$$

унифицируемо подстановкой $\{u = a, x = y, z = f(y)\}$, а множество

$$\{R(x, f(x)), R(u, u)\}$$

неунифицируемо. Действительно, если заменить x на u, то получим множество

$$\{R(u, f(u)), R(u, u)\}.$$

Проводить же замену $u = f(u)$ запрещено определением подстановки, да и бесполезно, т. к. она приводит к формулам $R(f(u), f(f(u)))$ и $R(f(u), f(u))$, которые тоже различны.

Если множество унифицируемо, то существует, как правило, не один унификатор этого множества, а несколько. Среди всех унификаторов данного множества выделяют так называемый наиболее общий унификатор.

Дадим необходимые определения.

Определение. Пусть $\xi = \{x_1 = t_1, x_2 = t_2, \ldots, x_k = t_k\}$ и $\eta = \{y_1 = s_1, y_2 = s_2, \ldots, y_l = s_l\}$ – две подстановки. Тогда *произведением* подстановок ξ и η называется подстановка, которая получается из последовательности равенств

$$\{x_1 = \eta(t_1), x_2 = \eta(t_2), \ldots, x_k = \eta(t_k), y_1 = s_1, y_2 = s_2, \ldots, y_l = s_l\} \qquad (4)$$

вычеркиванием равенств вида $x_i = x_i$ для $1 \le i \le k$, $y_j = s_j$, если $y_j \in \{x_1, \ldots, x_k\}$, для $1 \le j \le l$.

Произведение подстановок ξ и η будем обозначать через $\xi \circ \eta$. Подчеркнем, что сначала действует ξ, а потом η.

Рассмотрим пример. Пусть $\xi = \{x = f(y), z = y, u = g(d)\}$, $\eta = \{x = c, y = z\}$. Тогда последовательность равенств (4) из определения произведения имеет вид

$$\{x = f(z), z = z, u = g(d), x = c, y = z\}.$$

В этой последовательности вычеркнем второе и четвертое равенства, получим произведение

$$\xi \circ \eta = \{x = f(z), u = g(d), y = z\}.$$

Нетрудно показать, что произведение подстановок ассоциативно, т. е. для любых подстановок ξ, η, ξ выполняется равенство

$\xi\circ(\eta\circ\zeta) = (\xi\circ\eta)\circ\zeta$, и что пустая подстановка является нейтральным элементом относительно умножения. Последнее означает выполнение равенств $\sigma\circ\varepsilon = \varepsilon\circ\sigma = \sigma$ для любой подстановки s.

Произведение подстановок $\sigma = \{x_1 = t_1\}\circ\{x_2 = t_2\}\circ\ldots\circ\{x_n = t_n\}$ мы будем иногда задавать последовательностью равенств: $\sigma = (x_1 = t_1,$ $x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n)$. Действие подстановки σ на дизъюнкт (и на терм) в этом случае состоит в *последовательной* (а не одновременной) замене x_1 на t_1, x_2 на t_2 и т. д., x_n на t_n.

Определение. Унификатор σ множества литералов или термов называется *наиболее общим унификатором* этого множества, если для любого унификатора τ того же множества литералов существует подстановка ξ такая, что $\tau = \sigma\circ\xi$.

Например, для множества $\{P(x, f(a), g(z)), P(f(b), y, v)\}$ наиболее общим унификатором является подстановка $\sigma = \{x = f(b), y = f(a), v = g(z)\}$. Если в качестве τ взять унификатор $\{x = f(b), y = f(a), z = c, v = g(c)\}$, то $\xi = \{z = c\}$.

Если множество литералов унифицируемо, то наиболее общий унификатор существует. Это утверждение мы докажем в конце параграфа. А сейчас приведем алгоритм нахождения наиболее общего унификатора. Алгоритм называется *алгоритмом унификации*. Для изложения алгоритма потребуется понятие множества рассогласований.

Определение. Пусть M – множество литералов (или термов). Выделим первую слева позицию, в которой не для всех литералов (или термов) стоит один и тот же символ. Затем в каждом литерале выпишем выражение, которое начинается символом, занимающим эту позицию. (Этими выражениями могут быть сам литерал, атомарная формула или терм.) Множество полученных выражений называется *множеством рассогласований* в M.

Например, если $M = \{P(x, f(y), a), P(x, u, g(y)), P(x, c, v)\}$, то первая слева позиция, в которой не все литералы имеют один и тот же символ, – пятая позиция. Множество рассогласований состоит из термов $f(y)$, u, c. Множество рассогласований $\{P(x, y), \neg P(a, g(z))\}$ есть само множество. Если $M = \{\neg P(x, y), \neg Q(a, v)\}$, то множество рассогласований равно $\{P(x, y), Q(a, v)\}$.

Алгоритм унификации

Ш а г 1. Положить $k = 0$, $M_k = M$, $\sigma_k = \varepsilon$.

Ш а г 2. Если множество M_k состоит из одного литерала, то выдать σ_k в качестве наиболее общего унификатора и завершить работу. В противном случае найти множество N_k рассогласований в M_k.

Ш а г 3. Если в множестве N_k существует переменная v_k и терм t_k, не содержащий v_k, то перейти к шагу 4, иначе, выдать сообщение о том, что множество M неунифицируемо и завершить работу.

Ш а г 4. Положить $\sigma_{k+1} = \sigma_k \circ \{v_k = t_k\}$ (подстановка σ_{k+1} получается из σ_k заменой v_k на t_k и, возможно, добавлением равенства $v_k = t_k$). В множестве M_k выполнить замену $v_k = t_k$, полученное множество литералов взять в качестве M_{k+1}.

Ш а г 5. Положить $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Пусть $M = \{P(x, f(y)), P(a, u)\}$. Проиллюстрируем работу алгоритма унификации на множестве M. На первом проходе алгоритма будет найдена подстановка $\sigma_1 = \{x = a\}$, так как множество рассогласований N_0 равно $\{x, a\}$. Множество M_1 будет равно $\{P(a, f(y)), P(a, u)\}$. На втором проходе алгоритма подстановка будет расширена до $\sigma_2 = \{x = a, u = f(y)\}$ и $M_2 = \{P(a, f(u))\}$. Так как M_2 состоит из одного литерала, то алгоритм закончит работу и выдаст σ_2.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $M = \{P(x, f(y)), P(a, b)\}$. На первом проходе алгоритма будет найдена подстановка $\sigma_1 = \{x = a\}$ и $M_1 = \{P(a, f(y)), P(a, b)\}$. На третьем шаге второго прохода будет выдано сообщение о том, что множество M неунифицируемо, так как множество рассогласования $N_1 = \{f(y), a\}$ не содержит переменной.

Отметим, что при выполнении шага 4 из множества M_k удаляется одна из переменных (переменная v_k), а новая переменная не возникает. Это означает, что алгоритм унификации всегда заканчивает работу, так как шаг 4 не может выполняться бесконечно. Довольно ясно, что если алгоритм заканчивает работу на шаге 3, то множество M неунифицируемо. Также понятно, что если алгоритм заканчивает работу на шаге 2, то σ_k – унификатор множества M. А вот то, что σ_k – наиболее общий унификатор, доказать не так просто. Тем не менее, сделаем это.

Теорема 4.2. Пусть M – конечное непустое множество литералов. Если M унифицируемо, то алгоритм унификации заканчивает работу на шаге 2, и выдаваемая алгоритмом подстановка σ_k является наиболее общим унификатором множества M.

Доказательство. Пусть τ – некоторый унификатор множества M. Индукцией по k докажем существование подстановки α_k такой, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$.

База индукции: $k = 0$. Тогда $\sigma_k = \varepsilon$ и в качестве α_k можно взять τ.

Шаг индукции: Предположим, что для всех значений k, удовлетворяющих неравенству $0 \le k \le l$, существует подстановка α_k такая, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$.

Если $\sigma_l(M)$ содержит один литерал, то на следующем проходе алгоритм остановится на шаге 2. Тогда σ_l будет наиболее общим унификатором, поскольку $\tau = \sigma_l \circ \alpha_l$.

Пусть $\sigma_l(M)$ содержит более одного литерала. Тогда алгоритм унификации найдет множество рассогласований N_l. Подстановка α_l должна унифицировать множество N_l, поскольку $\tau = \sigma_l \circ \alpha_l$ – унификатор множества M. Поскольку N_l – унифицируемое множество рассогласований, оно содержит (хотя бы одну) переменную v.

Обозначим буквой t терм из N_l, отличный от v. Множество N_l унифицируется подстановкой α_l, поэтому $\alpha_l(v) = \alpha_l(t)$. Отсюда следует, что t не содержит v. Можно считать, что на шаге 4 алгоритма для получения σ_{l+1} использовано равенство $v = t$, т. е. $\sigma_{l+1} = \sigma_l \circ \{v = t\}$. Из равенства $\alpha_l(v) = \alpha_l(t)$ следует, что α_l содержит равенство $v = \alpha_l(t)$.

Пусть $\alpha_{l+1} = \alpha_l \setminus \{v = \alpha_l(t)\}$. Тогда $\alpha_{l+1}(t) = \alpha_l(t)$, так как t не содержит v. Далее, имеем равенства

$$\{v = t\} \circ \alpha_{l+1} = \alpha_{l+1} \cup \{v = \alpha_{l+1}(t)\} = \alpha_{l+1} \cup \{v = \alpha_l(t)\} = \alpha_l.$$

Это означает, что $\alpha_l = \{v = t\} \circ \alpha_{l+1}$. Следовательно,

$$\tau = \sigma_l \circ \alpha_l = \sigma_{l+1} \circ \{v = t\} \circ \alpha_l = \sigma_{l+1} \circ \alpha_{l+1}.$$

Итак, для любого k существует подстановка α_k такая, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$. Так как множество M унифицируемо, то алгоритм должен закончить работу на шаге 2. Тогда последняя подстановка σ_k будет унификатором множества M, поскольку множество $\sigma_k(M)$ состоит из одного литерала. Более того, σ_k будет наиболее общим унификатором, так как для произвольного унификатора τ существует подстановка σ_k такая, что $\tau = \sigma_k \circ \alpha_k$.

Теорема доказана.

§ 3. Метод резолюций в логике первого порядка

Определение. *Правилом резолюций в логике предикатов* называется следующее правило: из дизъюнктов $\neg P(t_1, ..., t_n) \vee F$ и $P(s_1, ..., s_n) \vee G$ выводим дизъюнкт $\sigma(F) \vee \sigma(G)$, где σ – наиболее общий унификатор множества

$$\{P(t_1, ..., t_n), P(s_1, ..., s_n)\}.$$

Дизъюнкт $\sigma(F) \vee \sigma(G)$ называется *бинарной резольвентой* первых двух дизъюнктов, а литералы $\neg P(t_1, \ldots, t_n)$ и $P(s_1, \ldots, s_n)$ – *отрезаемыми* литералами.

Например, с помощью правила резолюций из дизъюнктов $\neg Q(a, f(x)) \vee R(x)$ и $Q(u, z) \vee \neg P(z)$ можно вывести дизъюнкт $R(x) \vee \neg P(f(x))$, используя подстановку $\sigma = \{u = a, z = f(x)\}$.

В отличие от логики высказываний в логике предикатов нам понадобится еще одно правило.

Определение. *Правилом склейки в логике предикатов* называется следующее правило: из дизъюнкта $\Diamond P(t_1, ..., t_n) \vee ... \vee \Diamond P(s_1, ..., s_n) \vee F$ выводим дизъюнкт $\sigma(\Diamond P(t_1, ..., t_n)) \vee \sigma(F)$, где σ – наиболее общий унификатор множества $\{P(t_1, ..., t_n), ..., P(s_1, ..., s_n)\}$, $\Diamond$ – знак отрицания или его отсутствие. Дизъюнкт $\sigma(\Diamond P(t_1, \ldots, t_n)) \vee \sigma(F)$ называется *склейкой* исходного дизъюнкта. (Отметим, что если знак отрицания стоит перед одной из записанных выше атомарных формул, то он стоит и перед другими.)

Например, правило склейки, примененное к дизъюнкту

$$\neg \mathrm{P}(x, y) \vee \neg P(y, x) \vee \neg \mathrm{P}(a, a) \vee Q(x, y, v),$$

дает дизъюнкт

$$\neg \mathrm{P}(a, a) \vee Q(a, a, v).$$

Определение вывода в логике первого порядка немного отличается от аналогичного определения в логике высказываний.

Определение. Пусть S – множество дизъюнктов. *Выводом из множества дизъюнктов* S называется последовательность дизъюнктов

$$D_1, D_2, \ldots, D_n$$

такая, что каждый дизъюнкт D_i принадлежит S, выводим из предыдущих дизъюнктов по правилу резолюций или выводим из предыдущего по правилу склейки.

Как и в логике высказываний, дизъюнкт D выводим из S, если существует вывод из S, последним дизъюнктом которого является D.

Приведем пример. Пусть $S = \{\neg B(x) \vee \neg C(x) \vee T(f(x)), C(y) \vee T(f(z)), B(a)\}$. Тогда последовательность

$$\begin{array}{ll} D_1 = \neg B(x) \vee \neg C(x) \vee T(f(x)); & D_2 = C(y) \vee T(f(z)); \\ D_3 = \neg B(x) \vee T(f(x)) \vee T(f(z)); & D_4 = \neg B(x) \vee T(f(x)); \\ D_5 = B(a); & D_6 = T(f(a)) \end{array}$$

является выводом из S. Отметим, что $D_1, D_2, D_5 \in S$, дизъюнкт D_3 выводим из D_1 и D_2 по правилу резолюций, дизъюнкт D_6 – из D_4 и D_5 по тому же правилу, а D_4 – из D_3 по правилу склейки.

Как и в логике высказываний, в логике первого порядка есть утверждение, называемое теоремой о полноте. Это утверждение фактически совпадает с формулировкой теоремы 4.1. Тем не менее приведем его.

Теорема 4.3. Множество дизъюнктов S логики первого порядка невыполнимо тогда и только тогда, когда из S выводим пустой дизъюнкт.

Теорема имеет довольно сложное доказательство. Оно будет приведено в § 6. В данном же параграфе мы ограничимся примером применения метода резолюций и рядом определений, необходимых для доказательства теоремы 4.3.

Для доказательства логичности следствия формулы G из формул $F_1, \ldots, F_k$ метод резолюций в логике предикатов применяется почти так же, как и в логике высказываний. А именно, сначала составляется множество формул $T = \{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}$. Затем каждая из формул этого множества приводится к сколемовской нормальной форме, в полученных формах зачеркиваются кванторы общности и связки конъюнкции. Получается множество дизъюнктов S. На последнем этапе находится вывод пустого дизъюнкта из множества S. Напомним, что все переменные в дизъюнктах предполагаются связанными кванторами общности. Это означает, что *метод резолюций для доказательства логичности может применяться лишь в случае, когда формулы* $F_1, \ldots, F_k$ *и* G *не имеют свободных переменных.* Если все же формулы содержат свободные переменные, то их надо заменить константами (такими, которые отсутствуют в этих формулах).

Рассмотрим пример. Пусть

$$F_1 = (\exists x)[\Pi(x) \ \&\ (\forall y)(C(y) \to З(x, y))],$$
$$F_2 = (\forall x)(\forall y)[\Pi(x) \ \&\ Л(y) \to \neg З(x, y)],$$
$$G = (\forall x)(C(x) \to \neg Л(x)).$$

Докажем, что формула G является логическим следствием множества формул F_1, F_2. Для этого достаточно доказать невыполнимость множества $T = \{F_1, F_2, \neg G\}$. Каждую из формул множества T приведем к сколемовской нормальной форме; получим формулы

$$(\forall y)[\Pi(a) \ \&\ (\neg C(y) \vee З(a, y))],$$
$$(\forall x)(\forall y)[\neg\Pi(x) \vee \neg Л(y) \vee \neg З(x, y)],$$
$$C(b) \ \&\ Л(b).$$

Тогда множество S будет содержать дизъюнкты: $D_1 = \Pi(a)$, $D_2 = \neg C(y) \vee З(a, y)$, $D_3 = \neg\Pi(x) \vee \neg Л(y) \vee \neg З(x, y)$, $D_4 = C(b)$, $D_5 = Л(b)$. А последовательность дизъюнктов D_1, D_3, $\neg Л(y) \vee \neg З(a, y)$, D_5, $\neg З(a, b)$, D_2, D_4, $З(a, b)$, [] будет выводом из S. Следовательно, формула G является логическим следствием формул F_1 и F_2.

Введем теперь ряд определений, необходимых для рассмотрения в следующих параграфах.

Напомним, что мы условились не писать в дизъюнктах повторяющиеся литералы. Это позволяет нам смотреть, если это необходимо, на дизъюнкт как на множество литералов. Если смотреть на дизъюнкт как на множество литералов, то результат применения правила резолюций к дизъюнктам D_1 и D_2 с отрезаемыми литералами L_1 и L_2 можно записать так:

$$D = [\sigma(D_1) - \sigma(L_1)] \cup [\sigma(D_2) - \sigma(L_2)],$$

где σ – наиболее общий унификатор L_1 и $\neg L_2$.

Определение. *Резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2 называется одна из следующих бинарных резольвент:

1) бинарная резольвента дизъюнктов D_1 и D_2;
2) бинарная резольвента склейки D_1 и дизъюнкта D_2;
3) бинарная резольвента дизъюнкта D_1 и склейки D_2;
4) бинарная резольвента склейки D_1 и склейки D_2.

Приведем пример. Пусть $D_1 = \neg P(y) \vee \neg P(g(x)) \vee R(f(y))$, $D_2 = P(g(a)) \vee Q(b)$. Склейка дизъюнкта D_1 есть дизъюнкт $D_1' = \neg P(g(x)) \vee R(f(g(x)))$. Бинарная резольвента D_1' и D_2 равна $R(f(g(a))) \vee Q(b)$. Следовательно, последний дизъюнкт есть резольвента дизъюнктов D_1 и D_2.

Определение. Если D – дизъюнкт, а σ – подстановка, то дизъюнкт $\sigma(D)$ называется *примером дизъюнкта D*.

Следующее утверждение часто называют *леммой о подъеме*.

Теорема 4.4. Если D_1' – пример дизъюнкта D_1, D_2' – пример дизъюнкта D_2, а D' – резольвента D_1' и D_2', то существует резольвента D дизъюнктов D_1 и D_2 такая, что D' – пример D.

Доказательство. Если D_1 и D_2 имеют общие переменные, то заменой переменных в одном из дизъюнктов можно добиться того, что переменные дизъюнкта D_1 отличны от переменных дизъюнкта D_2. Будем поэтому считать, что D_1 и D_2 не имеют общих переменных.

Так как D_1' – пример D_1 и D_2' – пример D_2, существуют подстановки α_1 и α_2 такие, что $D_1' = \alpha_1(D_1)$ $D_2' = \alpha_2(D_2)$. Последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ также будет подстановкой, и поскольку D_1 и D_2 не имеют общих переменных, имеем $D_1' = \alpha(D_1)$ и $D_2' = \alpha(D_2)$.

Дизъюнкт D' является резольвентой дизъюнктов D_1' и D_2'. Это означает, что существуют литералы $L_1' \in D_1'$ и $L_2' \in D_2'$ и подстановка τ такие, что τ есть наиболее общий унификатор L_1' и $\neg L_2'$ и

$$D' = (\tau(D_1') - \tau(L_1')) \cup (\tau(D_2') - \tau(L_2')). \qquad (1)$$

(Если при получении резольвенты D' к дизъюнктам D_1' и D_2' применялись склейки, то будем считать, что они учтены подстановками α_1 и α_2.)

Пусть $L_1^1, \ldots, L_1^r$ – литералы дизъюнкта D_1, которые подстановкой α переводятся в L_1', а $L_2^1, \ldots, L_2^s$ – литералы дизъюнкта D_2, которые подстановкой α переводятся в L_2^j. Литералы $L_1^1, \ldots, L_1^r$, следовательно, унифицируемы, а поэтому существует наиболее общий унификатор β_1 для этого множества. Литерал $\beta_1(L_1^1)$ (равный $\beta_1(L_1^2), \ldots, \beta_1(L_1^r)$) обозначим через L_1. По определению наиболее общего унификатора найдется подстановка γ_1, для которой выполняется равенство $\alpha_1 = \beta_1 \circ \gamma_1$. По аналогичным соображениям существуют подстановки β_2 и γ_2 такие, что β_2 – наиболее общий унификатор множества литералов $L_2^1, \ldots, L_2^s$ и $\alpha_2 = \beta_2 \circ \gamma_2$. Литерал $\beta_2(L_2^1)$ обозначим через L_2. Легко видеть, что L_1 и L_2 не имеют общих переменных. Поскольку дизъюнкты D_1 и D_2 также не имеют общих переменных, то можно считать, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и $\alpha = \beta \circ \gamma$. Сказанное в этом абзаце иллюстрируется рис. 4.1 и 4.2.

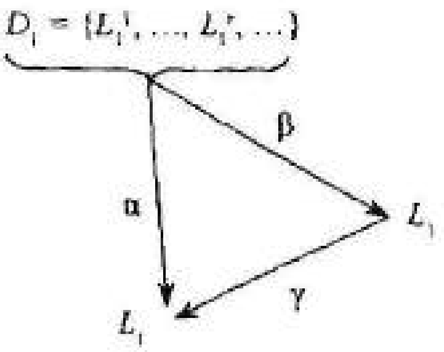


Рис. 4.1

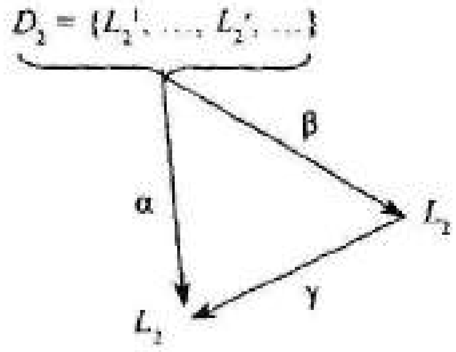


Рис. 4.2

Литералы L_1^j и $\neg L_2^j$, как отмечено выше, унифицируемы подстановкой τ. Следовательно, литералы L_1 и $\neg L_2$ также унифицируемы (подстановкой $\gamma \circ \tau$). Отсюда следует, что существует наиболее общий унификатор σ множества $\{L_1, \neg L_2\}$ (см. рис. 4.3).

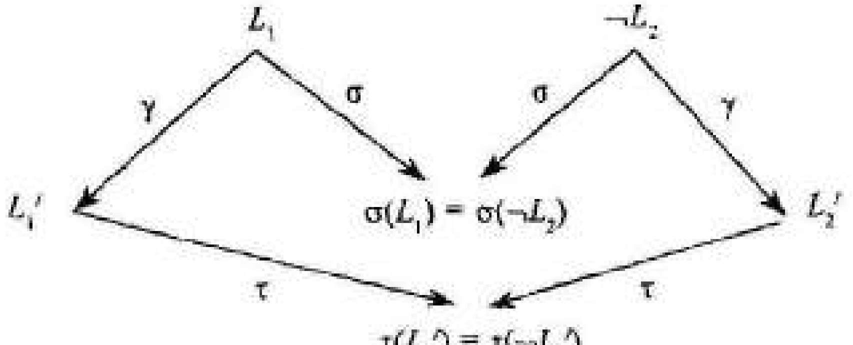


Рис. 4.3

Возьмем в качестве D дизъюнкт

$$D = [\sigma(\beta(D_1)) - \sigma(L_1)] \cup [\sigma(\beta(D_2)) - \sigma(L_2)]. \qquad (2)$$

Ясно, что D – резольвента дизъюнктов D_1 и D_2. Осталось показать, что D' – пример D.

Так как σ – наиболее общий унификатор L_1 и $\neg L_2$, то существует подстановка δ такая, что $\gamma \circ \tau = \sigma \circ \delta$. В таком случае из последнего равенства равенств (1), (2) и $\alpha = \beta \circ \gamma$ следует, что

$$\begin{aligned} D' &= (\tau(D_1') - \tau(L_1')) \cup (\tau(D_2') - \tau(L_2')) = \\ &= [\tau(\alpha(D_1)) - \tau(\alpha(L_1^1))] \cup [\tau(\alpha(D_2)) - \tau(\alpha(L_2^1))] = \\ &= [(\alpha \circ \tau)(D_1) - (\alpha \circ \tau)(L_1^1)] \cup [(\alpha \circ \tau)(D_2) - (\alpha \circ \tau)(L_2^1)] = \\ &= [(\beta \circ \gamma \circ \tau)(D_1) - (\beta \circ \gamma \circ \tau)(L_1^1)] \cup [(\beta \circ \gamma \circ \tau)(D_2) - (\beta \circ \gamma \circ \tau)(L_2^1)] = \\ &= [(\beta \circ \sigma \circ \delta)(D_1) - (\beta \circ \sigma \circ \delta)(L_1^1)] \cup [(\beta \circ \sigma \circ \delta)(D_2) - (\beta \circ \sigma \circ \delta)(L_2^1)] = \\ &= \delta[\sigma(\beta(D_1)) - \sigma(L_1)] \cup \delta[\sigma(\beta(D_2)) - \sigma(L_2)] = \delta(D). \end{aligned}$$

Мы доказали, что D' – пример D.

Теорема доказана.

§ 4. Эрбрановский универсум множества дизъюнктов

По определению интерпретации ее областью может быть любое непустое множество M. Было бы удобно иметь одно множество в качестве области интерпретации. В случае, когда решается вопрос о выполнимости множества дизъюнктов, таким множеством является так называемый эрбрановский универсум.

Пусть S – множество дизъюнктов.

Введем следующие обозначения. Через H_0 обозначим множество констант, содержащихся в S. Если S не содержит констант, то H_0 состоит из одной константы, скажем a, т. е. $H_0 = \{a\}$. Предположим, что введено множество H_i. Тогда H_{i+1} есть объединение множества H_i и термов вида $f(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n \in H_i$, f – символ n-местной функции, содержащейся хотя бы в одном из дизъюнктов множества S.

Определение. Множество $H_\infty = H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_n \cup \ldots$ называется *эрбрановским универсумом* множества дизъюнктов S.

Приведем три примера, которые будем использовать в дальнейшем.

Пример 1. Пусть $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(f(y)), \neg Q(f(a))\}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \{a\},\\
H_1 &= \{a, f(a)\},\\
&\ldots\\
H_\infty &= \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Пример 2. Пусть $S = \{P(x), Q(x) \vee \neg R(y)\}$. Множество S не содержит констант, поэтому $H_0 = \{a\}$. Так как дизъюнкты из S не содержат функциональных символов, выполняются равенства $H_0 = H_1 = H_2 = \ldots = H_\infty = \{a\}$.

Пример 3. Пусть $S = \{P(x), \neg P(b) \vee Q(y, f(y, a))\}$. Тогда $H_\infty = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b), f(f(a, a), a), \ldots\}$.

Эрбрановский универсум, как мы видим, определяется не всем множеством дизъюнктов S, а только символами функций и константами, входящими в дизъюнкты из S.

Определение. Множество атомарных формул вида $P(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n \in H_\infty$, а P – символ n-местного предиката, входящий хотя бы в один дизъюнкт из S, называется *эрбрановским базисом* множества дизъюнктов S.

Для множества дизъюнктов S из примера 1 эрбрановским базисом будет множество атомарных формул $B_1 = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), \ldots\}$. Эрбрановским базисом множества дизъюнктов S из примера 2 будет множество $B_2 = \{P(a), Q(a), R(a)\}$.

Пусть термин «выражение» означает терм, атомарную формулу, литерал или дизъюнкт. Тогда *основным выражением* будем называть выражение, не содержащее переменных.

Определение. Пусть D – дизъюнкт из множества дизъюнктов S. *Основным примером* дизъюнкта D называется дизъюнкт, полученный из D заменой переменных на элементы эрбрановского универсума H_∞.

Пусть S – множество дизъюнктов из примера 1. Тогда дизъюнкт $\neg Q(f(a))$ имеет один основной пример – сам этот дизъюнкт, а множество основных примеров дизъюнкта $\neg P(x) \vee Q(f(y))$ бесконечно: $\{\neg P(a) \vee Q(f(a)), \neg P(f(a)) \vee Q(f(a)), \neg P(a) \vee Q(f(f(a))), \ldots\}$. Если S – множество дизъюнктов из примера 2, то каждый из дизъюнктов этого множества S имеет один основной пример.

Как утверждалось в начале параграфа (и будет доказано в конце), для решения вопроса о выполнимости множества дизъюнктов в качестве области интерпретации достаточно рассматривать только эрбрановский универсум. Оказывается, можно еще ограничить и саму интерпретацию до так называемой H-интерпретации.

Определение. Пусть H_∞ – эрбрановский универсум множества дизъюнктов S. Интерпретация φ с областью H_∞ называется *H-интерпретацией множества S*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) для любой константы c из S выполняется равенство $\varphi(c) = c$;

2) если f – символ n-местной функции из S, то φf – функция, определенная на H_∞ равенством

$$(\varphi f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$$

для любых $t_1, \ldots, t_n \in H_\infty$.

Если $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ – эрбрановский базис множества дизъюнктов S, то H-интерпретацию φ удобно представлять в виде множества литералов

$$\{L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots\},$$

где L_i есть B_i, если $\varphi(B_i) = 1$, и $L_i = \neg B_i$, если $\varphi(B_i) = 0$.

Например, если S – множество дизъюнктов из примера 1, то эрбрановскими интерпретациями будут

$$\varphi_1 = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), \ldots\};$$
$$\varphi_2 = \{P(a), Q(a), \neg P(f(a)), \neg Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \neg P(f(f(f(a)))), \ldots\};$$
$$\varphi_3 = \{P(a), \neg Q(a), P(f(a)), \neg Q(f(a)), P(f(f(a))), \neg Q(f(f(a))), P(f(f(f(a)))), \ldots\}.$$

Последнее, что нужно сделать, чтобы доказать основное утверждение этого параграфа (теорему 4.5), ввести понятие H-интерпретации φ^*, соответствующей (произвольной) интерпретации φ множества S.

Предположим, что S содержит хотя бы одну константу. Если φ – интерпретация множества S с областью M, то для любого элемента h эрбрановского универсума значение $\varphi(h)$ определено (и является элементом множества M).

Определение. Пусть φ – интерпретация множества S с областью M. Тогда *H-интерпретацией* φ^*, *соответствующей интерпретации* φ, называется H-интерпретация, удовлетворяющая следующему условию: для любых элементов $t_1, \ldots, t_n$ эрбрановского универсума выполняется эквиваленция

$$(\varphi^*P)(t_1, \ldots, t_n) = 1 \Leftrightarrow (\varphi P)(\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_n)) = 1$$

для любого символа предиката P.

Приведем пример. Пусть S – множество дизъюнктов из примера 1. Напомним, что $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(f(y)), \neg Q(f(a))\}$ и эрбрановский базис множества S есть $B = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), \ldots\}$. Рассмотрим интерпертацию φ с областью $M = \{1, 2\}$, определяемую равенством $\varphi(a) = 1$ и табл. 4.1.

Таблица 4.1

	φf	φP	φQ
1	2	*0*	*1*
2	1	*1*	*1*

(В столбцах φP и φQ цифры *0* и *1* – истинностные значения.) Тогда

$$\varphi^* = \{\neg P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \neg P(f(f(a))), \ldots\}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда S не содержит констант. Пусть φ – интерпретация множества S с областью M и a – константа, образующая эрбрановский универсум H_∞. В этом случае значение $\varphi(a)$ не определено. Для получения H-интерпретации φ^* расширяем функцию φ на a, полагая $\varphi(a)$ равным произвольному элементу из M. Далее поступаем так, как описано выше. Если множество M неодноэлементно, то мы можем получить не одну H-интерпретацию φ^*, соответствующую φ. Нетрудно привести пример, когда H-интерпретаций φ^* столько же, сколько элементов в множестве M.

Следующее утверждение непосредственно следует из определений.

Лемма. Пусть φ – интерпретация с областью M, при которой все дизъюнкты из S истинны. Тогда все дизъюнкты из S истинны при любой H-интерпретации φ^*, соответствующей φ.

Теорема 4.5. Множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда S ложно при всех H-интерпретациях, т. е. для любой H-интерпретации множества S в S найдется дизъюнкт, который ложен при этой H-интерпретации.

Доказательство. Необходимость очевидна. Действительно, невыполнимость множества S означает, что это множество ложно при любой интерпретации, в том числе и при любой H-интерпретации. Достаточность следует из леммы, поскольку если S выполнимо, то существует хотя бы одна интерпретация φ, при которой все дизъюнкты из S истинны. Но тогда все дизъюнкты из S будут истинны и при H-интерпретации φ^*.

Теорема доказана.

§ 5. Семантические деревья, теорема Эрбрана

В предыдущем параграфе мы видели, что для получения ответа на вопрос о выполнимости множества дизъюнктов можно рассматривать не все интерпретации, а только H-интерпретации. В данном параграфе мы продвинемся еще дальше в этом направлении. Мы фактически покажем, что для решения упомянутого вопроса можно ограничиться конечными подмножествами эрбрановского универсума. Основным понятием этого параграфа будет понятие семантического дерева.

На дерево будем смотреть как на корневое ориентированное дерево. Дерево будем изображать растущим вниз, не указывая ориентацию дуг. Дугам дерева поставим в соответствие (припишем) множества литералов. Напомним, что *листом* дерева называется вершина, из которой не выходит ни одна дуга. *Путь* в дереве – это последовательность дуг

$$e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$$

такая, что если дуга e_i заходит в некоторую вершину, то дуга e_{i+1} выходит из этой вершины. Путь в дереве называется *максимальным*, если к нему нельзя добавить ни одной дуги. Для каждой вершины существует единственный путь от корня к этой вершине. Если вершина является листом, то этот путь максимален. Если π – путь в дереве, то через $I(\pi)$ обозначим объединение всех множеств литералов, приписанных дугам пути. В случае, когда π – путь от корня до вершины v, вместо $I(\pi)$ будем писать $I(v)$. Здесь мы используем понятие поддерева несколько в ином смысле, нежели в теории графов. А именно, *поддеревом* дерева T будем называть подграф T', удовлетворяющий следующим условиям:

1) T' – дерево;

2) T' содержит корень дерева T;

3) если из v в v' идет дуга в дереве T, v и $v' \in T'$, то T' содержит все вершины, в которые из v идет дуга.

Определение. Пусть S – множество дизъюнктов, B – эрбрановский базис для S. *Семантическим деревом для S* называется корневое дерево, каждой дуге которого приписано непустое множество формул из B или их отрицаний так, что выполнены следующие условия:

1. Из любой вершины выходит конечное число дуг $e_1, \ldots, e_k$; если c_i – конъюнкция литералов, приписанных дуге e_i, то $c_1 \vee c_2 \vee \ldots \vee c_k$ – тождественно истинная формула.

2. Для любой вершины v множество $I(v)$ не содержит противоположных литералов.

Рассмотрим примеры. Пусть S – множество дизъюнктов из примера 2 предыдущего параграфа, B – его эрбрановский базис. Напомним, что $B = \{P(a), Q(a), R(a)\}$. Для простоты в примерах вместо $P(a)$, $Q(a)$ и $R(a)$ будем писать просто P, Q, R. На рис. 4.4 и 4.5 приведены примеры семантических деревьев для S. Семантическое дерево может быть бесконечным. На рис. 4.6 приведен пример семантического дерева для множества дизъюнктов S из § 4 (пример 1). Напомним, что эрбрановский базис в этом случае есть $B = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), \ldots\}$.

Определение. Пусть B – эрбрановский базис множества дизъюнктов S. Семантическое дерево T называется *полным*, если для

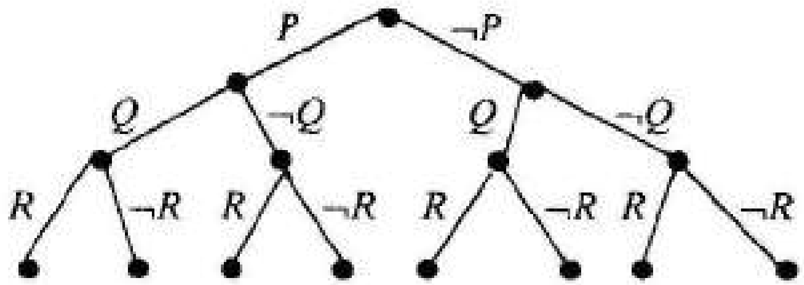


Рис. 4.4

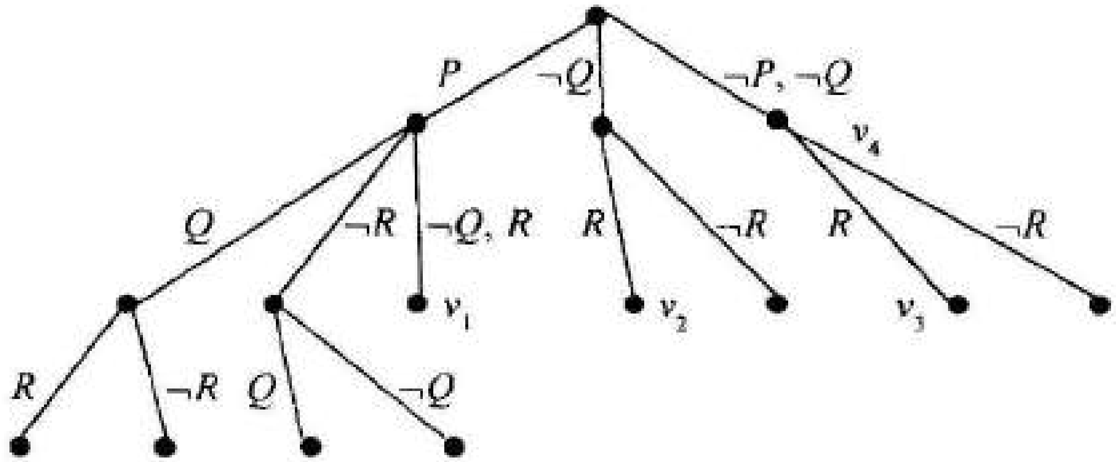


Рис. 4.5

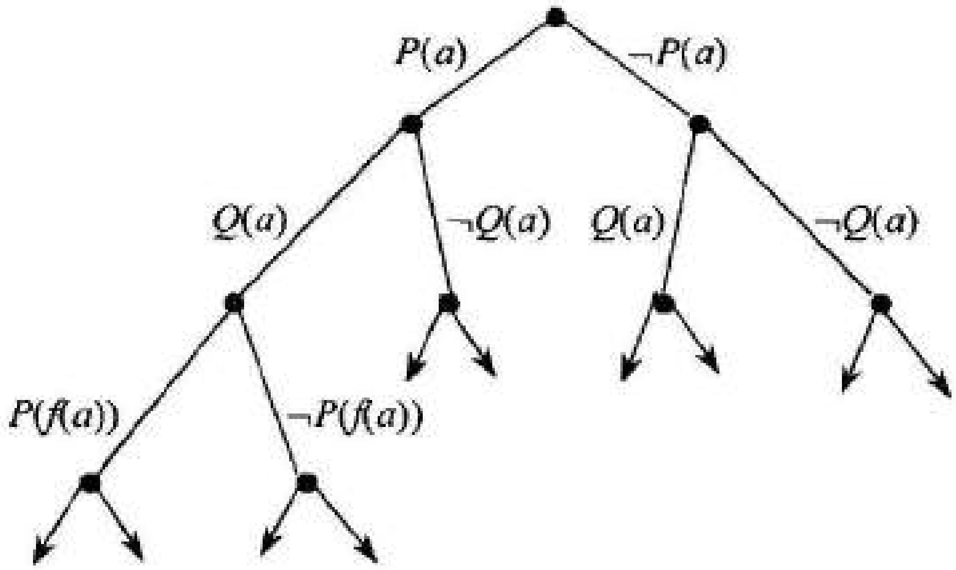


Рис. 4.6

любого элемента A базиса B и любого максимального пути π множество $I(\pi)$ содержит либо A, либо $\neg A$.

Семантические деревья, изображенные на рис. 4.4 и 4.6, являются полными, а семантическое дерево, изображенное на рис. 4.5, – неполное.

Определение. Вершина v семантического дерева называется *опровергающей*, если $I(v)$ опровергает основной пример некоторого дизъюнкта из S. Вершина v называется *максимальной опровергающей*, если вершина v', предшествующая v, опровергающей не является.

Рассмотрим в качестве примера дерево, изображенное на рис. 4.5. Напомним, что оно является семантическим деревом множества дизъюнктов $S = \{P(x), Q(x) \vee \neg R(y)\}$. Вершины v_1 и v_3 будут опровергающими вершинами, так как множество $I(v_1)$, равное $\{\neg Q(a) \& R(a), P(a)\}$, опровергает основной пример $Q(a) \vee \neg R(a)$ дизъюнкта $Q(x) \vee \neg R(y)$, а множество $I(v_3)$, равное $\{R(a), \neg P(a) \& \neg Q(a)\}$ опровергает основной пример $P(a)$ дизъюнкта $P(x)$. Вершина v_1 будет максимальной опровергающей, а вершина v_3 не будет максимальной опровергающей, потому что опровергающей является предшествующая ей вершина v_4. Вершина v_2 опровергающей не является.

Определение. Вершина v семантического дерева называется *выводящей*, если все непосредственно следующие за ней вершины являются максимальными опровергающими.

Пусть $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(f(y)), \neg Q(f(a))\}$ – множество дизъюнктов примера 1 предыдущего параграфа. Дерево, изображенное на рис. 4.7, является семантическим деревом для S. Вершина v этого дерева является выводящей вершиной, а никакие другие вершины выводящими не являются.

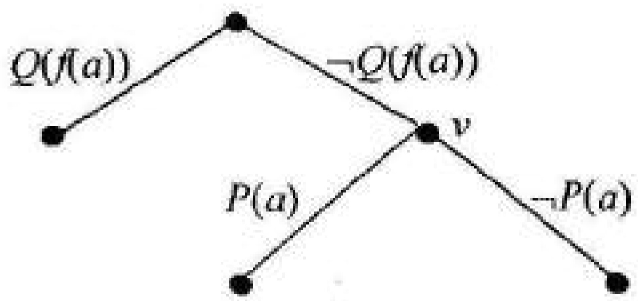


Рис. 4.7

Определение. Семантическое дерево называется *замкнутым*, если каждый его лист является максимальной опровергающей вершиной.

Дерево, изображенное на рис. 4.7, замкнуто, а деревья на рис. 4.4 и 4.5 не замкнуты.

Следующее утверждение – знаменитая теорема математической логики, которая является основой многих алгоритмов доказательства теорем. Она называется теоремой Эрбрана.

Теорема 4.6. Множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда любое полное семантическое дерево множества S имеет конечное замкнутое поддерево.

Доказательство теоремы 4.6 использует известное в математике утверждение, которое называется леммой Кенига. Сформулируем ее.

Лемма. Если T – бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит конечное число дуг, тогда дерево T содержит бесконечный путь, начинающийся от корня.

Доказательство леммы Кенига приводить не будем. С ним можно познакомиться по книге К. Куратовского и А. Мостовского, указанной в списке литературы. (В этой книге доказывается несколько более общее утверждение, называемое теоремой Кенига.)

Приведем доказательство теоремы 4.6. Докажем вначале необходимость. Пусть множество дизъюнктов S невыполнимо и T – полное семантическое дерево для S. Рассмотрим максимальный путь π в дереве T. По определению полного семантического дерева для каждой атомарной формулы A эрбрановского базиса B либо A, либо $\neg A$ принадлежит $I(\pi)$. Это означает, что $I(\pi)$ есть H-интерпретация множества S. Поскольку S невыполнимо, то $I(\pi)$ опровергает основной пример D' некоторого дизъюнкта D из S. Дизъюнкт D' конечен, поэтому путь π должен проходить через максимальную опровергающую вершину дерева T. В каждом максимальном пути отметим такую вершину. Пусть T' – поддерево дерева T, листьями которого являются отмеченные вершины. В силу леммы Кенига T' – конечное поддерево дерева T. Дерево T' по построению является замкнутым. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть полное семантическое дерево T содержит конечное замкнутое поддерево T'. По определению поддерева (см. начало данного параграфа) отсюда следует, что каждый максимальный путь дерева T содержит опровергающую вершину. Множество всех максимальных путей полного семантического дерева исчерпывает все H-интерпретации множества S. Следовательно S ложно при всех H-интерпретациях. По теореме 4.5 S невыполнимо.

§ 6. Полнота метода резолюций в логике первого порядка

Параграф посвящен доказательству теоремы 4.3. Напомним ее формулировку.

Теорема. Множество дизъюнктов S невыполнимо тогда и только тогда, когда из S выводим пустой дизъюнкт.

Доказательство. Отметим вначале, что вывод из множества дизъюнктов S можно определить как последовательность дизъюнктов, каждый дизъюнкт которой принадлежит S или является резольвентой предыдущих дизъюнктов.

Пусть множество дизъюнктов S невыполнимо и $B = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ – эрбрановский базис для S. Рассмотрим полное семантическое дерево T, изображенное на рис. 4.8.

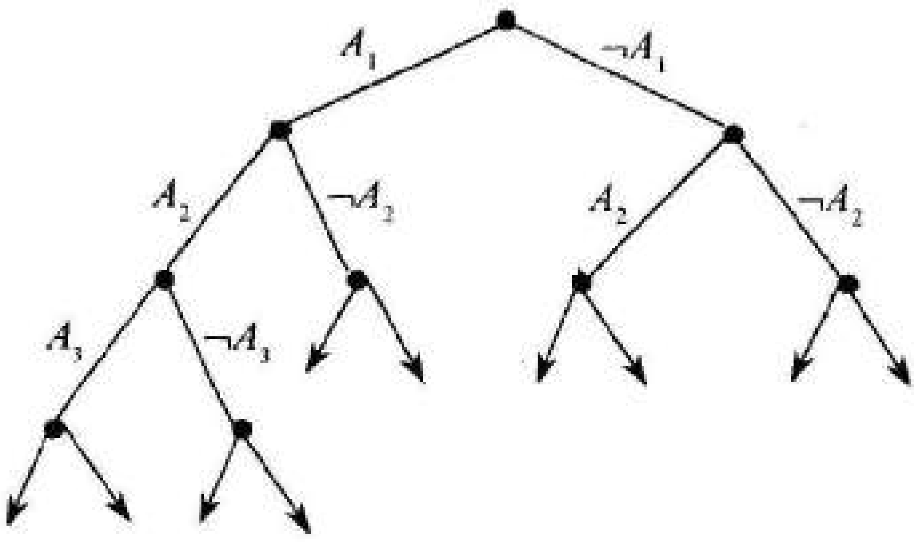


Рис. 4.8

По теореме Эрбрана T содержит конечное замкнутое семантическое поддерево T'. Если T' состоит только из корня, то $[] \in S$, и поэтому $[]$ выводим из S. Предположим, что T' состоит не только из корня. Тогда T' имеет вершину v, потомки v_1 и v_2 которой являются максимальными опровергающими для множества S вершинами. Пусть

$$I(v) = \{ L_1, L_2, \ldots, L_k \},$$
$$I(v_1) = \{ L_1, L_2, \ldots, L_k, A_{k+1} \},$$
$$I(v_2) = \{ L_1, L_2, \ldots, L_k, \neg A_{k+1} \}.$$

Существует дизъюнкт $D_1 \in S$ такой, что его основной пример D_1' опровергается в $I(v_1)$, и существует дизъюнкт $D_2 \in S$ такой, что его основной пример D_2' опровергается в $I(v_2)$. Так как дизъюнкты D_1' и D_2' не опровергаются в $I(v)$, то D_1' содержит $\neg A_{k+1}$, а D_2' – A_{k+1}. Применим к D_1' и D_2' правило резолюций, отрезая литералы $\neg A_{k+1}$ и A_{k+1}, получим дизъюнкт D':

$$D' = (D_1' - \neg A_{k+1}) \cup (D_2' - A_{k+1}).$$

Отметим, что дизъюнкт $D_1' - \neg A_{k+1}$ ложен в $I(v)$, поскольку в противном случае, D_1' был бы истинен в $I(v_1)$. Аналогично заключаем, что $D_2' - A_{k+1}$ ложен в той же интерпретации $I(v)$.

Отсюда следует, что D' ложен при $I(v)$.

По лемме о подъеме (теорема 4.4) существует дизъюнкт D, который является резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2. Ясно, что D опровергается в $I(v)$. Рассмотрим множество дизъюнктов $S \cup \{D\}$. Замкнутое семантическое дерево T'' для этого множества дизъюнктов можно получить вычеркиванием некоторых вершин (и идущих в них дуг) дерева T'. А именно, в дереве T' вычеркиваем все дуги и вершины, которые лежат ниже первой (на пути из корня) вершины, где дизъюнкт D' ложен. Полученное таким образом дерево T'' содержит меньше вершин, нежели дерево T', так как $v_1, v_2 \notin T''$.

Применим описанный выше процесс к T'', мы получим резольвенту дизъюнктов из $S \cup \{D\}$. Расширим множество $S \cup \{D\}$ за счет этой резольвенты, придем к конечному замкнутому дереву с меньшим числом вершин, нежели T''. В конце концов получим замкнутое семантическое дерево, состоящее только из корня. Это возможно лишь в случае, когда множество S, расширенное резольвентами, содержит пустой дизъюнкт. Следовательно, [] выводим из S. Необходимость условия теоремы доказана.

Докажем достаточность. Пусть пустой дизъюнкт выводим из S, и $D_1, D_2, \ldots, D_n$ = [] – вывод из S. Предположим, что S выполнимо в некоторой интерпретации. Тогда, поскольку правило резолюций и правило склейки сохраняют истинность, все дизъюнкты вывода, в том числе и пустой, являются истинными в этой интерпретации. Полученное противоречие доказывает, что S невыполнимо.

Теорема доказана.

В качестве следствия теоремы о полноте получим **теорему компактности** (см. § 7 главы 3), которая утверждает, что если формула G является логическим следствием бесконечного множества формул K, то G является логическим следствием некоторого конечного подмножества K' множества K.

Доказательство теоремы компактности. Пусть G – логическое следствие множества формул K. Тогда множество формул $K \cup \{\neg G\}$ невыполнимо. Каждую из формул этого множества приведем к сколемовской нормальной форме, удалим кванторы общности и связки конъюнкции, получим невыполнимое множество дизъюнктов S. По теореме о полноте из S выводим пустой дизъюнкт. Пусть S' – множество тех дизъюнктов из S, которые участвуют в выводе пустого дизъюнкта. Ясно, что S' – конечное невыполнимое множество дизъюнктов. Обозначим через K' множество тех формул из K, из которых получились дизъюнкты, принадлежащие S'. Тогда $K' \cup \{\neg G\}$ – конечное невыполнимое множество формул. Это означает, что G есть логическое следствие конечного множества формул K'.

Теорема компактности доказана.

§ 7. Стратегии метода резолюций

В множестве дизъюнктов существует, как правило, не одна пара дизъюнктов, к которым можно применить правило резолюций. Способ выбора дизъюнктов и литералов в них, к которым применяется правило резолюций (и правило склейки) для получения резольвенты, называется *стратегией* метода. В этом параграфе будет рассмотрено три стратегии: насыщения уровней, предпочтения более коротких дизъюнктов и вычеркивания. Достаточно полное описание известных стратегий содержится в книге Ч. Ченя и Р. Ли, приведенной в списке литературы.

Стратегия насыщения уровней

Наиболее простой, с идейной точки зрения, способ выбора дизъюнктов для получения резольвенты состоит в организации полного перебора возможных вариантов. Этот перебор можно организовать следующим образом. Пусть $S_0 = S$ – исходное множество дизъюнктов. Будем считать, что S_0 упорядочено. Пусть D_2 пробегает по порядку множество дизъюнктов S_0, начиная со второго. В качестве D_1 берем последовательно дизъюнкты из S_0, предшествующие D_2 начиная с первого, и формируем последовательность S_1, состоящую из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2. (Порядок на S_1 определяется порядком добавления дизъюнктов в S_1.) Предположим, что получены последовательности дизъюнктов S_0, S_1, ..., S_{n-1} и $n>1$. Тогда последовательность S_n получается следующим образом. В качестве D_2 берутся по порядку дизъюнкты из S_{n-1}, а в качестве D_1 – дизъюнкты из $S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{n-1}$, предшествующие D_2. Последовательность S_n будет состоять из всевозможных резольвент дизъюнктов D_1 и D_2. Процесс порождения резольвент прекращается, как только получается пустой дизъюнкт.

Описанная в предыдущем абзаце стратегия называется *стратегией насыщения уровней*. (Уровни – это последовательности $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$) Проследим, как она работает на примере множества дизъюнктов $S = \{X \vee Y, \neg X \vee \neg Y, X \vee Z, \neg X \vee Z, \neg Z\}$:

S_0: (1) $X \vee Y$,
(2) $\neg X \vee \neg Y$,
(3) $X \vee Z$,
(4) $\neg X \vee Z$,
(5) $\neg Z$;

S_1: (6) $Y \vee \neg Y_2$ (из (1) и (2)),
(7) $X \vee \neg X$ (из (1) и (2)),
(8) $\neg Y \vee Z$ (из (2) и (3)),
(9) $Y \vee Z$ (из (1) и (4)),
(10) Z (из (3) и (4)),
(11) X (из (3) и (5)),
(12) $\neg X$ (из (4) и (5));

S_2: (13) $X \vee Y$ (из (1) и (6)),
(14) $\neg X \vee \neg Y$ (из (2) и (6)),
(15) $X \vee Y$ (из (1) и (7)),
(16) $\neg X \vee \neg Y$ (из (2) и (7)),
(17) $X \vee Z$ (из (3) и (7)),
(18) $\neg X \vee Z$ (из (4) и (7)),
(19) $X \vee Z$ (из (1) и (8)),
(20) $\neg Y$ (из (5) и (8)),
(21) $\neg Y \vee Z$ (из (6) и (8)),
(22) $\neg X \vee Z$ (из (2) и (9)),
(23) Y (из (5) и (9)),
(24) $Y \vee Z$ (из (6) и (9)),
(25) Z (из (8) и (9)),
(26) [] (из (5) и (10)).

Мы видим, что порождено много лишних дизъюнктов. Так, (6) и (7) – тождественно истинные дизъюнкты. Удаление или добавление тождественно истинного дизъюнкта не влияет на выполнимость множества дизъюнктов, поэтому такие дизъюнкты должны быть удалены из вывода. Далее, некоторые дизъюнкты порождаются неоднократно, например, $X \vee Y$, $\neg X \vee \neg Y$, $Y \vee Z$. Это означает, что выбором дизъюнктов для получения резольвенты надо управлять.

Стратегия предпочтения (более коротких дизъюнктов)

Эта стратегия является модификацией предыдущей: сначала в качестве D_2 берется самый короткий дизъюнкт из S_{n-1} (если таких несколько, то они перебираются по порядку), затем более длинные и т. д. Аналогичные условия налагаются и на D_1. Такая стратегия в применении к тому же множеству дизъюнктов S дает следующую последовательность дизъюнктов:

S_0: (1) $X \vee Y$,
(2) $\neg X \vee \neg Y$,
(3) $X \vee Z$,
(4) $\neg X \vee Z$,
(5) $\neg Z$;
S_1: (6) X (из (3) и (5)),
(7) $\neg X$ (из (4) и (5)),
(8) $Y \vee \neg Y$ (из (1) и (2)),
(9) $X \vee \neg X$ (из (1) и (2)),
(10) $\neg Y \vee Z$ (из (2) и (3)),
(11) $Y \vee Z$ (из (1) и (4)),
(12) Z (из (3) и (4));
S_2: (13) $\neg Y$ (из (2) и (6)),
(14) Z (из (2) и (6)),
(15) Y (из (1) и (7)),
(16) Z (из (3) и (7)),
(17) [] (из (6) и (7)).

Вывод оказался короче, чем в предыдущем примере, но по-прежнему содержит повторяющиеся и тождественно истинные дизъюнкты. Свободным от этих недостатков является вывод, полученный в соответствии со стратегией вычеркивания. Для ее описания введем вначале следующее понятие.

Определение. Дизъюнкт D называется *расширением* дизъюнкта C, если существует подстановка σ такая, что $\sigma(C) \subseteq D$.

Для логики высказываний это означает, что просто $D = C \vee D'$ (при некоторой перестановке литералов). В случае логики предикатов ситуация не столь проста. Например, $D = Q(a) \vee P(b,y) \vee R(u)$ есть расширение дизъюнкта $C = P(x,y) \vee Q(z) \vee Q(v)$.

Стратегия вычеркивания

Эта стратегия, как и стратегия предпочтения, является модификацией стратегии насыщения уровней. Она применяется следующим образом: после того как получена очередная резольвента D дизъюнктов D_1 и D_2, проверяется, является ли она тождественно истинной формулой или расширением некоторого дизъюнкта C из $S_0 \cup \ldots \cup S_{n-1}$, и в случае положительного ответа D вычеркивается, т. е. не заносится в последовательность S_n.

Применение стратегии к прежнему множеству дизъюнктов дает следующую последовательность дизъюнктов:

S_0: (1) $X \vee Y$,
(2) $\neg X \vee \neg Y$,
(3) $X \vee Z$,
(4) $\neg X \vee Z$,
(5) $\neg Z$;
S_1: (6) $\neg Y \vee Z$ (из (2) и (3)),
(7) $Y \vee Z$ (из (1) и (4)),
(8) Z (из (3) и (4)),
(9) X (из (3) и (5)),
(10) $\neg X$ (из (4) и (5)),
(11) $\neg Y$ (из (5) и (6)),
(12) Y (из (5) и (7)),
(13) [] (из (5) и (8)).

Рассмотренные стратегии являются *полными* в том смысле, что если множество дизъюнктов S невыполнимо, то из S, пользуясь стратегией, можно вывести пустой дизъюнкт. Для первых двух стратегий это достаточно очевидно. Полнота стратегии вычеркивания следует из того, что если D и C – дизъюнкты из S и D – расширение C, то множество S невыполнимо в том и только в том случае, когда невыполнимо множество $S \setminus \{D\}$.

§ 8. Применение метода резолюций

Мы рассмотрим здесь применение метода резолюций в доказательстве теорем и при планировании действий.

Доказательство теорем

Применим метод резолюций в доказательстве одной простой теоремы из теории групп. В качестве исходной возьмем следующую аксиоматику теории групп:

$$F_1: (\forall x,y,z)[(xy)z = x(yz)],$$
$$F_2: (\forall x,y)(\exists z)(zx = y),$$
$$F_3: (\forall x,y)(\exists z)(xz = y).$$

Предположим, что нам надо доказать теорему G: $(\exists x)(\forall y)(yx = y)$, т. е. что в группе существует правая единица.

Наша задача – установить, что формула G есть логическое следствие формул F_1, F_2, F_3. Прежде чем решать эту задачу, перейдем к другой сигнатуре. Введем символ трехместного предиката P, который интерпретируется следующим образом:

$$P(x, y, z) \text{ означает, что } xy = z.$$

В новой сигнатуре формулы F_1, F_2, F_3 и G запишутся так:

$$F_1' = (\forall x,y,z)[P(x, y, u) \mathbin{\&} P(y, z, v) \mathbin{\&} P(x, v, w) \to P(u, z, w)],$$
$$F_2' = (\forall x,y)(\exists z)P(z, x, y),$$
$$F_3' = (\forall x,y)(\exists z)P(x, z, y),$$
$$G' = (\exists x)(\forall y)P(y, x, y).$$

Сформируем множество $T = \{F_1', F_2', F_3', \neg G'\}$, каждую из формул множества T приведем к сколемовской нормальной форме и удалим кванторы общности (конъюнкция в сколемовских нормальных формах этих формул не появится). Получим множество дизъюнктов D_1, D_2, D_3, D_4:

$$D_1 = \neg P(x, y, u) \vee \neg P(y, z, v) \vee \neg P(x, v, w) \vee P(u, z, w),$$
$$D_2 = P(f(x,y), x, y),$$
$$D_3 = P(x, g(x,y), y),$$
$$D_4 = \neg P(h(x), x, h(x)).$$

Построим вывод пустого дизъюнкта из множества дизъюнктов $D_1, \ldots, D_4$. Пусть эти дизъюнкты – первые дизъюнкты вывода. Заменив переменные в дизъюнкте D_2, получим дизъюнкт $D_2' = P(f(x',y'), x', y')$. Литералы $P(x, y, u)$ и D_2' унифицируются подстановкой $\sigma_1 = \{x = f(x',y'), y = x', u = y'\}$. Применим правило резолюций к D_1 и D_2' (и указанным литералам), получим дизъюнкт

$$D_5 = \neg P(x', z, v) \vee \neg P(f(x',y'), v, w) \vee P(y', z, w).$$

Далее, литерал $P(f(x',y'), v, w)$ и D_2 унифицируются подстановкой $\sigma_2 = \{x' = x, y' = y, v = x, w = y\}$. Правило резолюций, примененное к D_5 и D_2, дает дизъюнкт

$$D_6 = \neg P(x, z, x) \vee P(y, z, y).$$

Резольвентой дизъюнктов D_3 и D_6 будет дизъюнкт

$$D_7 = P(y, g(y',y'), y).$$

Для получения этой резольвенты заменим переменные в D_3, получим $D_3 = P(x', g(x',y'), y')$ и используем подстановку $\sigma_3 = \{x = y', z = g(y',y')\}$. Наконец, из дизъюнктов D_4 и D_7 с помощью подстановки $\sigma_4 = \{y = h(g(y',y')), x = g(y',y')\}$ получаем пустой дизъюнкт.

Планирование действий

Отметим вначале одно свойство метода резолюций. Пусть сигнатура τ состоит из двух символов двухместных предикатов P и Q, которые интерпретируются следующим образом: $P(x, y)$ означает, что x – сын y, $Q(x, z)$ означает, что x – внук z. Рассмотрим формулы:

$$F_1 = (\forall x,y,z)[P(x, y) \,\&\, P(y, z) \to Q(x, z)],$$
$$F_2 = (\forall x)(\exists y)P(x, y),$$
$$G = (\forall x)(\exists z)Q(x, z),$$

смысл которых достаточно ясен.

Используя метод резолюций, покажем, что G есть логическое следствие F_1 и F_2. Приведем формулы F_1, F_2 и $\neg G$ к сколемовской нормальной форме, получим дизъюнкты:

$$D_1 = \neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, z),\ D_2 = P(x, f(x)),\ D_3 = \neg Q(a, z).$$

Вывод пустого дизъюнкта получается довольно просто:

$D_4 = \neg P(a, y) \vee \neg P(y, z)$ $\quad$ (D_1 и D_3, $\{x = a\}$).
$D_5 = \neg P(f(a), z)$ $\quad$ (D_2 и D_4, $\{x = a, y = f(a)\}$).
$D_6 = []$ $\quad$ (D_2 и D_5, $\{x = f(a), z = f(a)\}$).

Подстановка $z = f(f(a))$ означает, что дед элемента a есть отец отца элемента a. Таким образом, метод резолюций не только устанавливает факт логического следствия формулы G из формул F_1 и F_2, но еще и «подсказывает», как по данному x получить z такой, чтобы формула $Q(x, z)$ была истинна.

Довольно часто интересующая нас переменная участвует не в одной подстановке, как в этом примере переменная z, а в нескольких. Для того, чтобы отследить все подстановки, в которых может изменить значение переменная, к формуле $\neg G$ добавляют литерал ответа $ANS(z)$ и заканчивают вывод не пустым дизъюнктом, а литералом ответа.

В качестве п р и м е р а использования метода резолюций в задачах планирования действий рассмотрим известную в теории искусственного интеллекта задачу об обезьяне и бананах. В задаче говорится об обезьяне, которая хочет съесть бананы, подвешенные к потолку комнаты. Рост обезьяны недостаточен, чтобы достать бананы. Однако в комнате есть стул, встав на который обезьяна может достать бананы. Какие ей надо совершить действия, чтобы достать бананы?

Задачу формализуем следующим образом. Комнату с находящимися в ней обезьяной, стулом и бананами будем называть *предметной областью*. Совокупность мест, где находятся в данный момент в комнате обезьяна, стул и бананы, будем называть *состоянием предметной области.* Рассмотрим два предиката $P(x, y, z, s)$ и $R(s)$. Пусть $P(x, y, z, s)$ означает, что в состоянии s обезьяна находится в точке x, стул – в y, бананы – в z; $R(s)$ означает, что в состоянии s обезьяна взяла бананы.

Возможности обезьяны формализуем следующим образом. Введем три функции, которые принимают значения в множестве состояний:

ИДТИ(x, y, s) – состояние, которое получится из s, если обезьяна из точки x перешла в y;

НЕСТИ(x, y, s) – состояние, которое получится из s, если обезьяна перенесла стул из точки x в y;

БРАТЬ(s) – состояние, которое получится из s, если обезьяна взяла бананы.

Условия задачи запишутся в виде следующих формул:

$F_1 = (\forall x,y,z,s)[P(x, y, z, s) \rightarrow P(u, y, z, \text{ИДТИ}(x, u, s))]$,
$F_2 = (\forall x,z,s)[P(x, x, z, s) \rightarrow P(u, u, s, \text{НЕСТИ}(x, u, s))]$,
$F_3 = (\forall x)[P(x, x, x, s) \rightarrow R(\text{БРАТЬ}(s))]$.

Пусть в начальном состоянии s_0 обезьяна находилась в точке a, стул – в точке b, бананы – в точке c. Следовательно, к написанным формулам надо добавить формулу

$F_4 = P(a, b, c, s_0)$.

Надо показать, что формула $G = (\exists s)R(s)$ есть логическое следствие формул F_1, F_2, F_3, F_4. Из множества формул $\{F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G\}$ получим множество дизъюнктов $D_1 - D_5$ (к дизъюнкту, полученному из $\neg G$, добавлен литерал ответа $ANS(s)$):

$D_1 = \neg P(x, y, z, s) \vee P(u, y, z, \text{ИДТИ}(x, u, s))$;
$D_2 = \neg P(x, x, z, s,) \vee P(u, u, z, \text{НЕСТИ}(x, u, s))$;
$D_3 = \neg P(x, x, x, s) \vee R(\text{БРАТЬ}(s))$;
$D_4 = P(a, b, c, s_0)$;
$D_5 = \neg R(s) \vee ANS(s)$.

Последовательность дизъюнктов D_1–D_5 продолжаем до вывода литерала ответа.

$D_6 = \neg P(x, x, x, s) \vee ANS(\text{БРАТЬ}(s))$ получается из D_3 и D_5;
$D_7 = \neg P(x, x, u, s) \vee ANS(\text{БРАТЬ}(\text{НЕСТИ}(x, u, s)))$
получается из D_2 и D_6;
$D_8 = \neg P(x, y, z, s) \vee ANS(\text{БРАТЬ}(\text{НЕСТИ}(y, z, \text{ИДТИ}(x, y, s))))$
получается из D_1 и D_7;
$D_9 = ANS(\text{БРАТЬ}(\text{НЕСТИ}(b, c, \text{ИДТИ}(a, b, s_0))))$
получается из D_4 и D_8.

Итак, для того, чтобы обезьяне взять бананы, надо сначала из точки a идти в точку b, затем из точки b нести стул в точку c и в точке c, встав на стул, взять бананы.

§ 9. Метод резолюций и логическое программирование

Наиболее распространенная в наше время технология решения задач на компьютере состоит в том, что вначале программист должен разработать алгоритм решения задачи, а затем записать его на определенном формальном языке. Эти этапы вместе с последующей отладкой требуют от программиста значительных затрат времени и достаточно высокой квалификации. На большинстве этапов решения задачи имеется сильная зависимость от внутренних механизмов компьютера, на котором это решение будет осуществлено. Отмеченные (а также и некоторые другие) недостатки алгоритмической технологии программирования стимулировали поиск новых возможностей. Осознание того, что вычисление – частный случай логического вывода, а алгоритм – формальное задание функции, привело к идее логического программирования. Суть этой идеи состоит в том, чтобы компьютеру предлагать не алгоритмы, а описания предметной области задачи и саму задачу в виде некоторой аксиоматической системы, а решение задачи – в виде вывода в такой системе. От программиста при таком подходе требуется описать с достаточной степенью полноты предметную область и формулировку задачи на языке этой системы, а поиск вывода, приводящего к решению задачи, поручается компьютеру.

Конечно, при таком широком понимании логического программирования любая программная система, поддерживающая ту или иную логическую модель, представляет собой фактически и систему логического программирования. Разница может возникнуть лишь тогда, когда в инструментальной системе программист определяет в существенной степени способ обработки описания предметной области и задачи. На самом деле логическое программирование понимается, как правило, в более узком смысле.

Логическая программа представляет собой совокупность формул логики предикатов одного из следующих видов:

(1) $p(t_1, \ldots, t_k).$,
(2) $q(s_1, \ldots, s_l) :- q_1(s_1, \ldots, s_l), \ldots, q_n(s_1, \ldots, s_l).$,

где $p(t_1, \ldots, t_k)$, $q(s_1, \ldots, s_l)$, $q_1(s_1, \ldots, s_l)$, ..., $q_n(s_1, \ldots, s_l)$ – атомарные формулы логики первого порядка, буквы t и s с индексами – термы. Синтаксис языка логического программирования требует, чтобы в конце каждого выражения ставилась точка. Формулы первого вида называются *фактами*, а второго – *правилами*. Формула $q(s_1, \ldots, s_l)$ называется заголовком правила (2). Выполнение программы инициализируется запросом – формулой вида

(3) $r_1(u_1, ..., u_m), ..., r_{n0}(u_1, ..., u_m).$,

где $r_j(u_1, ..., u_m)$ ($1 \le j \le n_0$) – атомарные логики первого порядка, буквы u с индексами – термы.

Мы описали синтаксис основных конструкций логического программирования. Семантика обычно представляется в двух видах – логическая семантика и процедурная семантика.

Введем сначала *логическую семантику*. Каждому факту (1) поставим в соответствие формулу вида

(1′) $F = (\forall x^*)p(t_1, ..., t_k)$,

где кванторы общности навешены на все переменные атомарной формулы (1). (Кроме переменных, в термах могут быть, разумеется, константы.) Правилу (2) поставим в соответствие формулу вида

(2′) $G = (\forall x^*)[q_1(s_1, ..., s_l) \& ... \& q_n(s_1, ..., s_l) \to q(s_1, ..., s_l)]$,

где кванторы общности, как и выше, навешены на все переменные. Запрос (3) получит в соответствие формулу

(3′) $H = (\exists x^*)[r_1(u_1, ..., u_m) \& ... \& r_{n0}(u_1, ..., u_m)]$,

где квантор существования связывает все переменные. Пусть $F_1, ..., F_a$ – формулы, соответствующие всем фактам, $G_1, ..., G_b$ – всем правилам. Тогда значение пары (программа, запрос) в логической семантике есть утверждение о том, что формула H есть логическое следствие формул $F_1, ..., F_a, G_1, ..., G_b$.

Операционная семантика – действия компьютера при ответе на запрос. Введем ее на примере следующей программы:

(1) $r(a, b).$;
(2) $q(b, g(c)).$;
(3) $p(x, f(y)) :– r(x, z), q(z, f(y)).$;
(4) $p(x, f(y)) :– r(x, z), q(z, g(y)).$;
(5) $r(x, z) :– q(f(x), g(z))$.

Здесь a, b, c, d – константы, x, y, z – переменные. Номера в скобках не являются синтаксической конструкцией логического программирования, они проставлены для удобства ссылок.

Предположим, что запрос есть

(6) $p(u, f(v))$.

При вычислении ответа на этот запрос интерпретатор формулирует цель $p(u, f(v))$ и пытается достичь ее, унифицируя цель с фактами. В нашем случае цель $p(u, f(v))$ не унифицируется ни с одним из фактов. Тогда интерпретатор пытается ее унифицировать с заголовком одного из правил. Это можно сделать с заголовком правила (3) с помощью подстановки $\sigma = (u = x,\ v = y)$. Запрос (6) принимает следующий вид:

(6′) $r(x, z),\ q(z, f(y))$

и формируется цель $r(x, z)$. Она достигается унификацией с первым фактом подстановкой $\sigma_1 = (x = a,\ z = b)$, и интерпретатор пытается достичь цели $q(b, f(y))$, но эта цель не унифицируется ни с одним из фактов, ни с заголовками правил. Следовательно, цель $q(b, f(y))$ недостижима и происходит возврат к запросу (6′) и цели $r(x, z)$. Делается попытка достичь этой цели при помощи правила (5), но эта попытка также неудачна. Происходит возврат к запросу (6) и цели $p(u, f(v))$. (См. рис. 4.9, где цели подчеркнуты.)

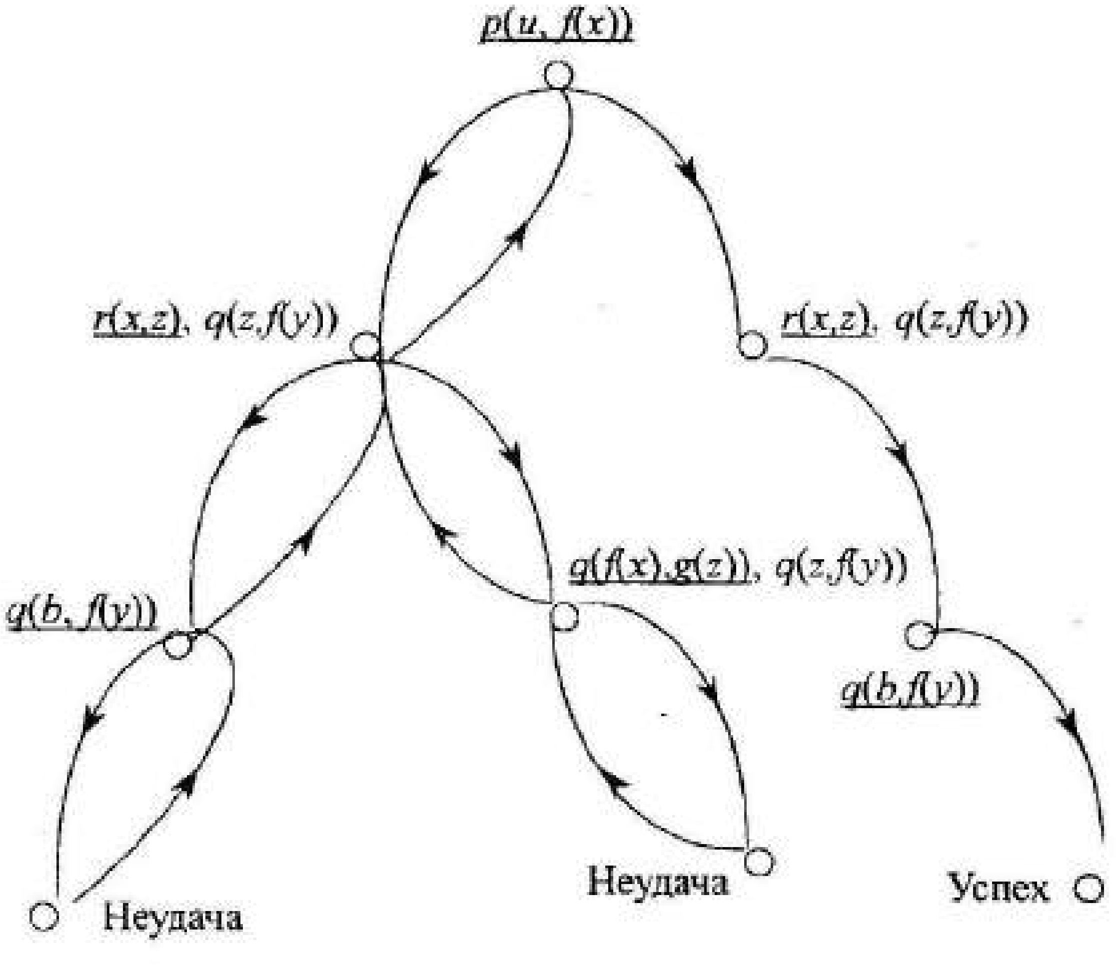


Рис. 4.9

Правило (3) «отработано». Интерпретатор унифицирует цель с заголовком правила (4) той же подстановкой σ. Запрос принимает вид

$$(6'') \ r(x, z), q(z, g(y)),$$

а целью становится $r(x, z)$. Цель унифицируется с первым фактом подстановкой σ_1 и ставится новая цель $q(b, g(y))$, которая унифицируется со вторым фактом подстановкой $\sigma_2 = (y = c)$. Исходная цель оказалась достижимой при результирующей подстановке $\sigma_3 = (u = a, v = c)$. Интерпретатор при этом может закончить работу и выдать подстановку σ_3. Возможен и другой режим работы интерпретатора, при котором он пытается найти все подстановки, ведущие к достижению цели.

Убедимся в том, что интерпретатор при поиске ответа на запрос фактически строит вывод с помощью правила резолюций.

Логическая семантика программе (1)–(5) ставит в соответствие следующие формулы:

$$F_1 = r(a, b),$$
$$F_2 = q(b, g(c)),$$
$$G_1 = (\forall x,y,z)[r(x, z) \ \& \ q(z, f(y)) \to p(x, f(y))],$$
$$G_2 = (\forall x,y,z)[r(x, z) \ \& \ q(z, g(y)) \to p(x, f(y))],$$
$$G_3 = (\forall x,z)[q(f(x), g(z)) \to r(x, z)],$$

а запросу (6) – формулу

$$H = (\exists u,v)p(u, f(v)).$$

Эта семантика, напомним, состоит в том, что H есть логическое следствие множества формул $\{F_1, F_2, G_1, G_2, G_3\}$.

Как будет применяться в этой ситуации метод резолюций? Вначале будет составлено множество формул $T = \{F_1, F_2, G_1, G_2, G_3, \neg H\}$. Затем каждая из формул множества T будет приведена к сколемовской нормальной форме, из которой будет получено множество дизъюнктов S. В нашем случае множество S состоит из дизъюнктов D_1–D_6.

$$D_1 = r(a, b);$$
$$D_2 = q(b, g(c));$$
$$D_3 = \neg r(x, z) \vee \neg q(z, f(g)) \vee p(x, f(y));$$

$D_4 = \neg r(x, z) \vee \neg q(z, g(y)) \vee p(x, f(y))$;

$D_5 = \neg q(f(x), g(z)) \vee r(x, z)$;

$D_6 = \neg p(u, f(v))$.

Отметим, что дизъюнкт D_6 получился из формулы $\neg H$.

Вывод пустого дизъюнкта будем осуществлять в соответствии с процедурной семантикой. Правило резолюций будет применяться так, что одним из исходных (для правила) дизъюнктов будет дизъюнкт D_6 или его потомки. Попытка получить пустой дизъюнкт за один шаг, т. е. правило резолюций применить к паре $\{D_1, D_6\}$ или $\{D_2, D_6\}$, не приводит к успеху. Применим тогда правило резолюций к паре $\{D_3, D_6\}$, получим резольвенту

$$D_7 = \neg r(x, z) \vee \neg q(z, f(y))$$

с помощью подстановки $\sigma = (u = x,\ v = y)$. Попробуем теперь в D_7 «уничтожить» литерал $\neg r(x, z)$. Это можно сделать с помощью дизъюнктов D_1 и D_5. Резольвентой дизъюнктов D_1 и D_7 будет дизъюнкт

$$D_8 = \neg q(b, f(y)),$$

единственный литерал, который нельзя «уничтожить» ни одним из дизъюнктов D_1–D_5. То же самое можно сказать и о резольвенте дизъюнктов D_5 и D_7.

Мы фактически доказали, что из множества дизъюнктов $\{D_1, ..., D_5, D_7\}$ пустой дизъюнкт невыводим (см. пути в графе на рис. 4.9, приводящие к неудаче).

Возьмем теперь резольвенту дизъюнктов D_4 и D_6:

$$D_9 = \neg r(x, z) \vee \neg q(z, g(y)).$$

Литерал $\neg r(x, z)$ дизъюнкта D_9 «уничтожим» с помощью D_1 и подстановки $\sigma_1 = (x = a,\ z = b)$, получим дизъюнкт

$$D_{10} = \neg q(b, g(y)).$$

Резольвента дизъюнктов D_2 и D_{10} дает пустой дизъюнкт, при этом используется подстановка $s_2 = (y = c)$. Мы получили вывод пустого дизъюнкта из множества дизъюнктов $\{D_1, ..., D_6\}$ (см. путь в графе на рис. 4.9, приводящий к успеху).

Итак, интерпретатор при поиске ответа на запрос строит резолютивный вывод.

Задачи

1. Доказать с помощью метода резолюций, что формула G есть логическое следствие формул $F_1, \dots F_n$.

а) $F_1 = X \vee Y$, $F_2 = X \to Z$, $G = (Y \to Z) \to Z$;

б) $F_1 = X$, $F_2 = X \& Y \to Z$, $G = Y \to Z$;

в) $F_1 = X \to Y \vee Z$, $F_2 = Z \to W$, $F_3 = \neg W$, $G = X \to Y$;

г) $F_1 = X \vee Y \vee \neg Z$, $F_2 = X \to X1$, $F_3 = Y \to Y1$, $F_4 = Z$, $G = X1 \vee Y1$;

д) $F_1 = X \& Y \to \neg X \& Z$, $F_2 = \neg(X \& \neg Y) \vee Z$, $G = X \to Z$;

е) $F_1 = X \to [\neg Y \& (\neg Y \to Z)]$,
$F_2 = (X \to \neg Y) \& \neg(\neg X \& \neg W)$, $G = W \vee Z$.

2. Запишите следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний. Если рассуждение логично, то докажите это методом резолюций; если нелогично, то постройте интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

2.1. Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать и забастовка заканчивается. Следовательно, забастовка длилась более месяца.

2.2. Если подозреваемый совершил эту кражу, то она была тщательно подготовлена или он имел соучастника. Если бы кража была тщательно подготовлена, то, если бы он имел соучастника, был бы украден дорогой компьютер. Компьютер остался на месте. Следовательно, подозреваемый невиновен.

2.3. Рассуждение из задачи 2.1 главы 1.

2.4. Рассуждение из задачи 2.2 главы 1.

2.5. Рассуждение из задачи 2.3 главы 1.

3. Пусть $\sigma = \{x_1 = f(x_2),\ x_2 = d,\ x_3 = f(x_1)\}$ – подстановка, $F = P(x_1, f(x_2)) \vee \neg Q(x_3)$, $G = P(x_3, x_2) \vee R(x_1, g(x_2))$. Найти $\sigma(F)$ и $\sigma(G)$.

4. Определить, унифицируемы ли следующие множества атомарных формул:

а) $M = \{P(a, y, y), P(z, x, f(x))\}$;

б) $M = \{P(x, y, z), P(u, h(y,y), y), P(a, b, c)\}$;

в) $M = \{P(a, f(x), g(x,y)), P(u, y, g(f(a), h(y))\}$.

5. Определить, имеют ли склейки следующие дизъюнкты:

а) $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x))$;

б) $P(x) \vee Q(f(x)) \vee P(f(x))$;

в) $P(a) \vee P(b) \vee P(x)$.

Если имеют, то найти их.

6. Найти все возможные резольвенты (если они есть) следующих пар дизъюнктов:

а) $C = \neg P(x) \vee Q(x, b)$, $D = P(a) \vee Q(a, b)$;

б) $C = \neg P(x) \vee Q(x, x)$, $D = \neg Q(a, f(a))$;

в) $C = \neg P(x) \vee \neg P(a) \vee \neg Q(y, f(b))$, $D = P(u) \vee Q(c, f(v))$.

7. Найти H_0, H_1, H_2 (см. § 4), если

а) $S = \{P(f(x), a), \neg P(y, g(x))\}$;

б) $S = \{P(a, g(x)), P(u, b)\}$;

в) $S = \{P(x, y), P(h(u, v), z)\}$.

8. Построить замкнутое семантическое дерево, если

а) $S_1 = \{P, \neg P \vee Q, \neg Q\}$;

б) $S_2 = \{P(x), \neg P(f(y))\}$;

в) $S_3 = \{P, Q \vee R, \neg P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg R\}$.

9. Найти невыполнимое множество S_i' основных примеров дизъюнктов множества S_i $(1 \le i \le 3)$, если

а) $S_1 = \{P(x, a, g(x,b)), \neg P(f(y), z, g(f(a),b))\}$;

б) $S_2 = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y), \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x,y), D(b), Q(b)\}$;

в) $S_3 = \{\neg K(x,y) \vee \neg L(y) \vee M(f(x)), \neg K(x,y) \vee \neg L(y) \vee M(z), \neg M(z), K(a, b), L(b)\}$.

10. Доказать с помощью метода резолюций, что формула G есть логическое следствие формул $F_1, \ldots, F_k$.

а) $F_1 = (\forall x)(P(x) \to Q(x)\ \&\ R(x))$,
$F_2 = (\exists x)(P(x)\ \&\ T(x))$, $G = (\exists x)(R(x)\ \&\ T(x))$,

б) $F_1 = (\forall x)[(\exists y)(M(y)\ \&\ S(x, y)) \to (\exists z)(I(z)\ \&\ E(x,z))]$,
$G = \neg(\exists x)I(x) \to (\forall u)(\forall v)(S(u, v) \to \neg M(v))$.

в) $F_1 = (\forall x)[P(x) \to (\exists y)(Q(y)\ \&\ S(x, y))]$,
$F_2 = (\exists x)[R(x) \vee (\forall y)\neg(\neg Q(y) \to S(x, y))]$,
$F_3 = (\exists x)P(x)$, $G = (\exists x)(\neg P(x) \vee R(x))$.

11. Используя метод резолюций в логике предикатов, докажите логичность следующих рассуждений.

11.1. Все студенты нашей группы – члены клуба «Спартак». А каждый член клуба «Спартак» занимается спортом. Следовательно, все студенты нашей группы занимаются спортом.

11.2. Все студенты нашей группы – болельщики «Спартака», а некоторые занимаются спортом. Следовательно, некоторые из болельщиков «Спартака» занимаются спортом.

11.3. Некоторые пациенты уважают всех докторов. Ни один пациент не уважает знахаря. Следовательно, никакой доктор не является знахарем.

11.4. Если деталь обрабатывалась на токарном станке, то она обрабатывалась и на фрезерном. Деталь $D1$ обрабатывалась на токарном станке $C1$. Следовательно, она обрабатывалась на фрезерном станке.

12. Будут ли логичны следующие рассуждения? Если логичны, то доказать это методом резолюций. Если нет, то построить интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно.

12.1. Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и любой математик может ее решить. Олег – математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не сможет решить никто.

12.2. Всякий, кто может решить эту задачу – математик. Олег – математик, но не может решить эту задачу. Следовательно, задачу не может решить никто.

12.3. Если кто-нибудь может решить эту задачу, то и какой-нибудь математик может ее решить. Олег – математик, но не может решить задачу. Следовательно, задачу не может решить никто.

12.4. Некоторые из первокурсников знакомы со всеми спортсменами института. Ни один первокурсник не знаком ни с одним любителем подледного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подледного лова.

12.5. Каждый из первокурсников знаком с кем-либо из спортсменов. Некоторые из первокурсников не знакомы ни с одним любителем подледного лова. Следовательно, ни один спортсмен не является любителем подледного лова.

Ответы, указания и решения

1. Приведем решение задачи 1д). Рассмотрим множество $T = \{F_1, F_2, \neg G\}$. Каждую из формул этого множества приведем к КНФ, получим соответственно $\neg X \vee \neg Y$, $\neg X \vee Y \vee Z$, $X \& \neg Z$. Тогда S равно $\{\neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Y \vee Z, X, \neg Z\}$, а вывод пустого дизъюнкта есть $\neg X \vee \neg Y, X, \neg Y, \neg X \vee Y \vee Z, \neg X \vee Z, Z, \neg Z$, [].

2. Приведем решение задачи 2.1. Рассмотрим высказывания: X = «конгресс отказывается принять законы», Y = «забастовка не будет закончена», Z = «забастовка длится более месяца», U = «президент фирмы уйдет в отставку». Тогда предложения рассуждения 2.1 можно представить формулами $F_1 = X \to Y \vee (Z \& U)$, $F_2 = X \& \neg Y$, $G = Z$. Сформируем множество $T = \{F_1, F_2, \neg G\}$, каждую из формул приведем к КНФ и получим множество дизъюнктов $S = \{\neg X \vee Y \vee Z, \neg X \vee Y \vee U, X, \neg Y, \neg Z\}$. Легко видеть, что из S выводим []. Следовательно, рассуждение логично.

В задачах 2.4 и 2.5 рассуждение логично, а в задачах 2.2 и 2.3 нелогично.

4. Указание. Воспользоваться алгоритмом унификации.

5. Дизъюнкт 5а) имеет склейку, остальные не имеют.

6. Дизъюнкты в задаче 6б) не имеют резольвент; в задаче 6а) дизъюнкты имеют одну резольвенту $Q(a, b)$; в задаче 6в) – пять $\neg P(a) \vee \neg Q(y, f(b)) \vee Q(c, f(v))$, $\neg P(x) \vee \neg Q(y, f(b)) \vee Q(c, f(v))$, $\neg P(x) \vee \neg P(a) \vee P(u)$, $\neg Q(y, f(b)) \vee Q(c, f(v))$, $\neg P(a) \vee P(u)$.

7. В задаче 7б) $H_0 = \{a, b\}$, $H_1 = \{a, b, g(a), g(b)\}$, $H_2 = \{a, b, g(a), g(b), g(g(a)), g(g(b))\}$.

8. На рис. 4.10 изображены семантические деревья для S_1, на рис. 4.12 – для S_3. На рис. 4.11 изображено семантическое дерево для S_2. (Эти множества дизъюнктов имеют и другие семантические деревья.)

9. Невыполнимое множество основных примеров есть
$S_1' = \{P(f(a), a, g(f(a), b)), \neg P(f(a), a, g(f(a), b))\}$;
$S_2' = \{P(a), \neg D(b) \vee L(a, b), \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg L(a, b), D(b), Q(b)\}$;
$S_3' = \{\neg K(a, b) \vee \neg L(b) \vee M(f(a)), \neg M(f(a)), K(a, b), L(b)\}$.

Рис. 4.10

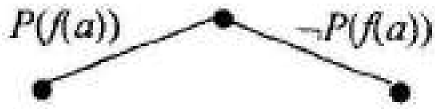


Рис. 4.11

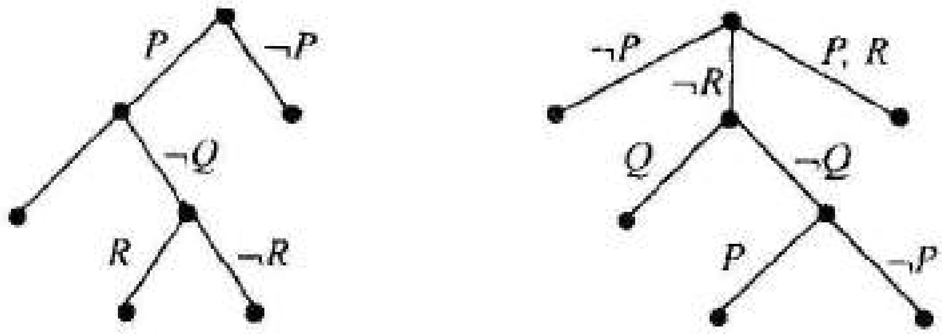


Рис. 4.12

10. Приведем решение задачи 10в). Составим множество $\{F_1, F_2, F_3, \neg G\}$. Каждую из формул приведем к сколемовской нормальной форме. Получим соответственно формулы

$$H_1 = (\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(f(x)) \,\&\, (\neg P(x) \vee S(x, f(x))];$$
$$H_2 = (\forall y)[(R(a) \vee \neg Q(y)) \,\&\, (R(a) \vee \neg S(a, y))];$$
$$H_3 = P(b);$$
$$H_4 = (\forall x)(P(x) \,\&\, \neg R(x)).$$

Множество S будет состоять из семи дизъюнктов: $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x)), \neg P(x) \vee S(x, f(x)), R(a) \vee \neg Q(y), R(a) \vee \neg S(a, y), P(b), P(x), \neg R(x)\}$. Выводом пустого дизъюнкта будет последовательность $D_1 = \neg P(x) \vee Q(f(x))$, $D_2 = P(x)$, $D_3 = Q(f(x))$, $D_4 = \neg R(x)$, $D_5 = R(a) \vee \neg Q(y)$, $D_6 = \neg Q(y)$, $D_7 = []$. Отметим, что D_3 следует по правилу резолюций из D_1, D_2, D_6 – из D_4 и D_5, а D_7 – из D_3 и D_6. Дизъюнкты D_1, D_2, D_4, D_5 принадлежат S.

11. Приведем решение задачи 11.2. Пусть символы одноместных предикатов F, G и S интерпретируются следующим образом:

$F(x)$: «x – болельщик "Спартака"»;

$G(x)$: «x – студент нашей группы»;

$S(x)$: «x – спортсмен».

Тогда рассуждение 11.2 можно представить формулами

$F = (\forall x)(G(x) \to F(x))$ & $(\exists y)(G(y)$ & $S(y))$;

$G = (\exists x)(F(x)$ & $S(x))$.

Составим множество формул $\{F, \neg G\}$ и каждую из них приведем к сколемовской нормальной форме. Получим формулы

$H_1 = (\forall x)(\neg G(x) \vee F(x))$ & $G(a)$ & $S(a)$;

$H_2 = (\forall x)(\neg F(x) \vee \neg S(x))$.

Множество дизъюнктов S равно $\{\neg G(x) \vee F(x), \neg F(x) \vee \neg S(x), G(a), S(a)\}$. Пустой дизъюнкт из множества S выводится очевидным образом.

12. Рассуждения 12.1, 12.4 логичны, остальные рассуждения нелогичны.

Список литературы

Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1979. 320 с.

Клини С. Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с.

Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Логический подход к искусственному интеллекту. От классической логики к логическому программированию. М.: Мир, 1999. 429 с.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971. 320 с.

Новиков П. С. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973. 399 с.

Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 231 с.

Ульман Дж. Основы систем баз данных. М.: Финансы и статистика, 1983. 334 с.

Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983. 360 с.

Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 527 с.

Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Замятин Алексей Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебное пособие

Редактор и корректор В. И. Попова
Компьютерная верстка Н. В. Комардина

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе УрГУ

Лицензия ИД № 05974 от 03.10.2001. Темплан 2004 г., поз. 10.
Подписано в печать 30.06.2004. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная
Гарнитура Times. Уч.-изд. л. 7,6. Усл. печ. л. 8,14. Тираж 350 экз. Заказ 263.

Издательство Уральского университета. 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано в ИПЦ «Издательство УрГУ». 620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.