ИМКН
Домашние задания по математической логике

Тема: «Высказывания и операции с ними»

I. Является ли формула F тождественно истинной (общезначимой)?
$F=(X \to Y) \to (\neg Y \to \neg X)$.

II. Существует ли формула F такая, что G является тождественно истинной?
$G=(F \vee Y \to \neg X) \to F \,\&\, X$.

III. Равносильны ли формулы F и G?
1. $F=\neg X$; $G=\neg(Z \to X) \vee \neg(Z \to Y)$.
2. $F=[(X \to Y) \,\&\, Z] \to \neg(X \,\&\, Y); G=\neg Y \vee \neg Z$
3. $F=[(X \leftrightarrow Y) \,\&\, Z] \,\&\, \neg(X \to \neg Z)$; $G=Y \,\&\, Z$.

IV. Является ли формула G логическим следствием формул $F_1,...,F_k$?
1. $G=X \,\&\, \neg Y;\ F_1=Y \to \neg Z;\ F_2=(X \vee Y) \,\&\, Z.$
2. $G=\neg X \to Y;\ F_1=X \leftrightarrow Y;\ F_2=(X \vee Y) \,\&\, Z.$
3. $G=(X \,\&\, Y) \vee \neg X;\ F_1=X \to Y;\ F_2=(X \vee Y) \to Z.$
4. $G=X \vee Y;\ F_1=X \vee \neg Z;\ F_2=\neg X \to Y;\ F_3=Y \to \neg Z.$

V. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний. Будет ли логичным рассуждение?

1. *В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.*

2. *Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.*

Тема: «Нормальные формы логики высказываний»

VI. Привести к ДНФ.
1. $F=X \,\&\, [Y \to \neg(Y \to Z)]$
2. $F=[(X \to Z) \to Y] \,\&\, (X \,\&\, Y \to X)$

VII. Привести к СДНФ.
1. $F=(X \vee Z) \,\&\, \neg[(X \,\&\, Y) \vee Z]$
2. $F=(X \to Z) \,\&\, [\neg(X \,\&\, Y) \leftrightarrow Z]$

VIII. Привести к КНФ.
1. $F=\neg(X \,\&\, Y \to \neg Z) \vee (X \,\&\, \neg Y)$
2. $F=\neg[((X \,\&\, Y) \vee Z) \vee ((X \vee Z) \,\&\, \neg Y)]$

Темы: «Метод резолюций» и «Контактные схемы»

IX. Доказать, что формула G является логическим следствием формул $F_1,...,F_k$, используя метод резолюций:
1. $G = X \& \neg Y;\ F_1 = Y \to \neg Z;\ F_2 = (X \vee Y) \& Z.$
2. $G = \neg X \to Y;\ F_1 = X \leftrightarrow Y;\ F_2 = (X \vee Y) \& Z.$
3. $G = (X \& Y) \vee \neg X;\ F_1 = X \to Y;\ F_2 = (X \vee Y) \to Z.$
4. $G = X \vee Y;\ F_1 = X \vee \neg Z;\ F_2 = \neg X \to Y;\ F_3 = Y \to \neg Z.$

X.
1. Построить наименьшую контактную схему, открывающую дверь при нажатии любых трех кнопок из четырех имеющихся. Записать соответствующую формулу логики высказываний.

2. Построить наименьшую контактную схему, открывающую дверь при нажатии кнопок директора и хотя бы одного из заместителей или всех кнопок заместителей директора (всего у директора три заместителя). Записать соответствующую формулу логики высказываний.

Тема: «Предикаты»

XI. Пусть M – множество точек и прямых линий на плоскости. На M заданы следующие предикаты: S(x,y) – “x принадлежит y”, P(x) – “x есть точка”, L(x) – “x есть прямая”, Q(x,y) – “x равен y”. Записать следующие предикаты формулами заданной сигнатуры.
1. “Прямые x и y имеют общую точку”.
2. “Прямые x и y параллельны”.
3. “Прямые x, y и z образуют треугольник”.

XII. Выбрать подходящую сигнатуру и записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов.

Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

Тема: «Равносильность формул логики предикатов»

XIII. Доказать неравносильность формул
1. $(\exists x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ и $(\exists x)F(x) \leftrightarrow (\exists x)G(x)$.
2. $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ и $(\forall x)F(x) \leftrightarrow (\forall x)G(x)$.

XIV. Доказать равносильность формул
$(\exists x)(F(x) \to G(x))$ и $(\forall x)F(x) \to (\exists x)G(x)$.

Тема: «Нормальные формы логики предикатов»

XV. Привести формулу к ПНФ и СНФ.
$\neg((\forall x)(\forall y)A(x,y) \& (\forall x)(\exists y)B(x,y)) \& ((\exists x)(\forall y)C(x,y) \to (\forall x)(\exists y)A(x,y))$.

Тема: «Логическое следствие логики предикатов»

XVI. Доказать нелогичность рассуждений.
Некоторые студенты нашей группы – болельщики «Спартака». А некоторые болельщики «Спартака» занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

Тема: «Метод резолюций логики предикатов»

XVII. Доказать логичность рассуждений.
Все студенты нашей группы – болельщики «Спартака», а некоторые занимаются спортом. Следовательно, некоторые из болельщиков «Спартака» занимаются спортом.

Тема: «Выполнимость в логике предикатов»

XVIII. Выполнимы ли формулы:
а) $(\exists x)(\forall y)(R(x,y)\,\&\,\neg R(y,x))$;
б) $(\forall x)(\exists y)(R(x,y)\to R(y,x))$;
в) $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow(\forall y)P(y))$?

XIX. Доказать тождественную истинность формулы
$(\neg(\exists x)A(x)\to\neg(\forall x)A(x))$.

XX. Доказать, что следующая формула истинна во всякой конечной модели, но не тождественно истинна:
$((\forall x)(\forall y)(\forall z)(F(x,x)\,\&\,(F(x,z)\to(F(x,y)\vee F(y,z))))\to(\exists u)(\forall v)F(u,v))$.

17.04.16