§9. Порядок роста функций. Асимптотические оценки

$f(n)$

Опр. Функция $f(n)$ имеет порядок $O(h)$, если существует константа C: $f(n) \le C \cdot h$ (начиная с некоторого номера n), где h зависит от n.

Пример 1. Функция $f(n) = 21n^2 + 500n - 1$ имеет порядок $O(n^2)$.

Пример 2. Функция $f(n) = n!$ имеет порядок $O(n^n)$.

Опр. Функция $f(n)$ имеет порядок $\boldsymbol{\Omega}(h)$, если существует константа C: $f(n) \geq C \cdot h$.

Замечание: определение равносильно условию: h имеет порядок $O(f)$.

Пример 3. $f(n) = 2^n \sqrt{n}$ имеет порядок $\boldsymbol{\Omega}(2^n)$.

Пример 4. Функция $f(n) = n!$ имеет порядок $\Omega(10^n)$ или $\Omega(e^n)$.

Опр. Функция $f(n)$ имеет порядок $\Theta(h)$, если существуют константы $C_1,\ C_2:\ C_1 h \le f(n) \le C_2 h$.

Пример 5. $f(n) = 21n^2 + 500n - 1$ имеет порядок $\Theta(n^2)$.

Опр. Функция $f(n)$ асимптотически равна h, если существует

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f}{h} = 1.$$

Обозначение: $f(n) \sim h$.

Пример 6. $f(n) = 21n^2 + 500n - 1$ асимптотически равна $21n^2$.

Замечание: если $f(n) \sim h$, то $f(n) = h + o(h)$.

Свойства оценок O, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Theta}$, ~:

1. Если $f(n)$ имеет порядок O (h_1), и h_1 имеет порядок O (h_2), то $f(n)$ имеет порядок O (h_2).

2. Для $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Theta}$, ~ аналогично.

Теорема (формула Стирлинга).

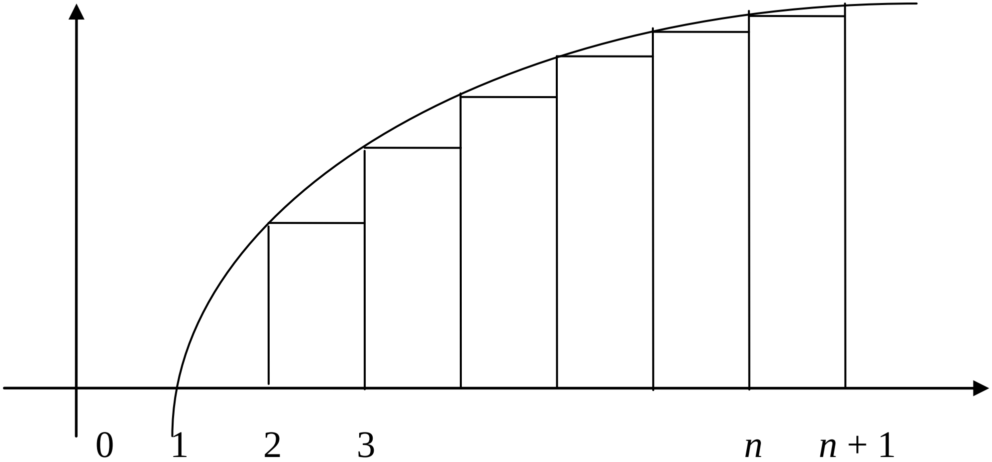
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Лемма. $\ln(n!) \sim n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n$.

Доказательство леммы:

$$\ln(n!) = \ln(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) = \sum_{i=1}^{n} \ln i = \sum_{i=2}^{n} \ln i.$$

$\sum_{i=2}^{n} \ln i$ = сумме площадей прямоугольников, вписанных в кривую $y = \ln x$.

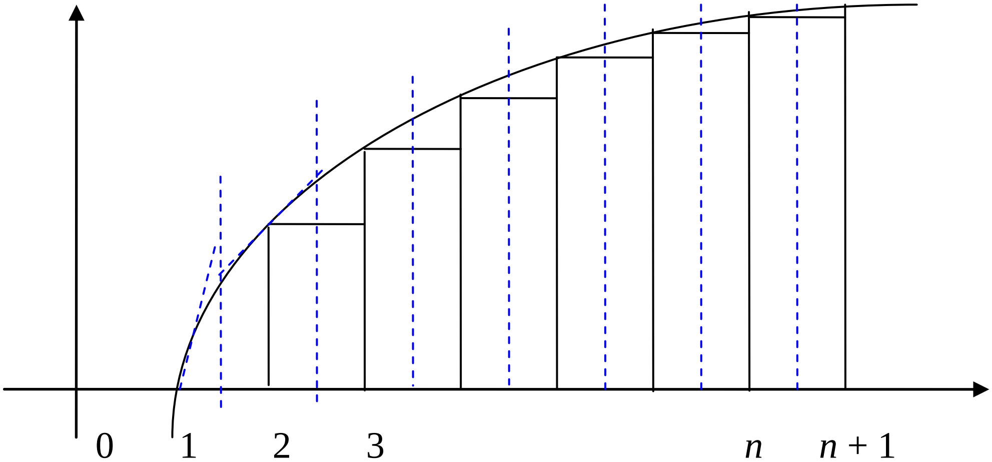


Дополнение к прямоугольникам – сумма площадей треугольников, равна $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\ln(i+1)-\ln i)=\frac{1}{2}\ln(n+1)$.

$$\ln n! + \frac{1}{2}\ln(n+1) < \int_{1}^{n+1} \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_{1}^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - (-1)$$

$$\ln n! < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n\,.$$

Если провести касательные к графику $y = \ln x$ в точках 1, 2,…, n, вертикальные прямые в точках $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, ..., n+\frac{1}{2}$, получим набор из одного треугольника и нескольких трапеций, которые покрывают криволинейную трапецию до n плюс половина прямоугольника.



$$\frac{1}{8}+\sum_{i=2}^{n}\ln i>\int_{1}^{n}\ln x dx+\frac{1}{2}\ln n$$

$$\frac{1}{8}+\sum_{i=2}^{n}\ln i>n\ln n-n+1+\frac{1}{2}\ln n$$

$$\ln n!>n\ln n-n+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\ln n$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{7}{8}<\ln n!<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1)-n$$

$$1+\frac{7}{(8n+4)\ln n}<\frac{\ln n!+n}{(n+\frac{1}{2})\ln n}<\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\ln n\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln n}=\frac{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}=1+o(\frac{1}{\ln n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!+n}{(n+\frac{1}{2})\ln n}=1\,.$$

Доказательство форулы Стирлинга:

$$n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{7}{8} < \ln n! < n \ln(n+1) - n + \frac{1}{2} \ln(n+1) .$$

$$n^n e^{-n} \sqrt{n}\, e^{\frac{7}{8}} < n! < (n+1)^n e^{-n} \sqrt{n+1} = \frac{n^n}{n^n} (n+1)^n e^{-n} \sqrt{n+1} .$$

$$n^n e^{-n} \sqrt{n}\, e^{\frac{7}{8}} < n! < n^n e^{-n} \sqrt{n+1}\, (1 + \tfrac{1}{n})^n .$$

$$\boxed{n^n e^{-n} \sqrt{n+1}\, (1 + \tfrac{1}{n})^n \sim e n^n e^{-n} \sqrt{n}}$$

Рассмотрим $a_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$.

Оценим $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\, e^{-n-1}\, \sqrt{n+1}}\; \frac{n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}}{n!} =$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\, e^{-n-1}\, \sqrt{n+1}}\ \frac{n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}}{n!} =$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+1)^n (n+1)\sqrt{n+1}}\ \frac{n^n\, e\sqrt{n}}{} =$$

$$= \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 .$$

Следовательно, последовательность $\{a_n\}$ убывающая, ограниченная снизу. Существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Тогда $n! \sim a\, n^n\, e^{-n} \sqrt{n}$.

Оценка констанды: $e^{\frac{7}{8}} < a \le e$ (т.к. $e^{\frac{7}{8}} < a_n < (1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$).

Значение константы $a = \sqrt{2\pi}$ (без доказательства).

Следствие 1.

$$C_n^m \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\, m(n-m)}} \frac{n^n}{m^m (n-m)^{n-m}}.$$

Следствие 2.

Если n – четное, то $C_n^{\frac{n}{2}} \sim \dfrac{2^n}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}}$.

Следствие 3.

$B(n) \sim \dfrac{r^n e^{r-n-1}}{\sqrt{\ln n}}$, где r – корень уравнения $x \ln x = n$.

§10. Производящие функции

Пусть значения $f(n)$ записаны в виде последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$.

Опр. Производящей функцией для $f(n)$ называется функция от действительной переменной x, записанная в виде конечной или бесконечной суммы функций (ряда): $a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots = \sum_i a_i\varphi_i(x)$.

Вариант 1. $\varphi_i(x) = x^i$.

$$\sum_i a_i x^i \ .$$

Пример. $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, x^i$.

Некоторые известные разложения:

1. $$\frac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty} x^i \text{ , для } x\in(-1;1) .$$

2. $$\frac{1}{1-ax}=\sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i \text{ , для } x\in\left(\frac{-1}{a};\frac{1}{a}\right).$$

3. $$\frac{1}{(1-ax)^m}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(m+i)!}{i!m!}a^i x^i .$$

Применение для решения рекуррентных соотношений.

Пусть $g(x)$ производящая функция для $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Тогда $xg(x)$ – производящая функция для $0, a_0, a_1, a_2, \ldots$;

$x^2 g(x)$ – производящая функция для $0,0, a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Известное рекуррентное соотношение, связывающее a_n, a_{n-1} и a_{n-2} указывает на связь между $g(x)$, $xg(x)$ и $x^2 g(x)$. Решив уравнение относительно $g(x)$, найдем производящую функцию.

Пример. Последовательность Фиббоначи: $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$.

$$\cancel{g(x) = xg(x) + x^2 g(x)}$$

Пример. Последовательность Фиббоначи: $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$.

$$x\,g(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots$$

$$+$$

$$x^2\,g(x) = \qquad a_0 x^2 + a_1 x^3 + \ldots$$

$$= a_0 x + \left(a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right)$$

$xg(x) + x^2 g(x) = a_0 x + g(x) - a_1 x - a_0$, и $a_1 = a_0 = 1$.

$$xg(x) + x^2 g(x) = g(x) - 1.$$

$$(1 - x - x^2)g(x) \equiv 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

$$g(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{-1}{x^2+x-1}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{x-(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{x-(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})-x}+\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})-x}.$$

$$g(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-x)}-\frac{1}{(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}-x)}\right)=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1} \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})} - \frac{1}{x_2} \frac{1}{(1 - \frac{x}{x_2})} \right) =$$

$$\boxed{\frac{1}{1 - ax} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_1} \right)^i - \frac{1}{x_2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_2} \right)^i \right) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^i-\frac{1}{x_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^i\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1^{i+1}}-\frac{1}{x_2^{i+1}}\right)x^i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-x_2)^{i+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}(-x_1)^{i+1}\right)x^i$$

т.к. $x_1 x_2 = -1$.

Полученная последовательность при i = 0 дает коэффициент $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=1$, т.е. для привычных начальных значений

$\Phi_1 = 1, \ \Phi_2 = 1$ нужно рассмотреть $x \cdot \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-x_2)^{i+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}(-x_1)^{i+1}\right)x^i$.

$$\Phi_i = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x_2)^i-\frac{1}{\sqrt{5}}(-x_1)^i \ .$$

Вариант 2. $\varphi_i(x) = \dfrac{x^i}{i!}$ «экспоненциальная производящая функция».

$$\sum_i a_i \frac{x^i}{i!}.$$

Пример. $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} A_n^i \dfrac{x^i}{i!}$.

Некоторые известные разложения:

1. $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$.

2. Теорема (Белла). $e^{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B(i) \frac{x^i}{i!}$.

Следствие (Тождество Добинского).

$$B(n) = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} .$$