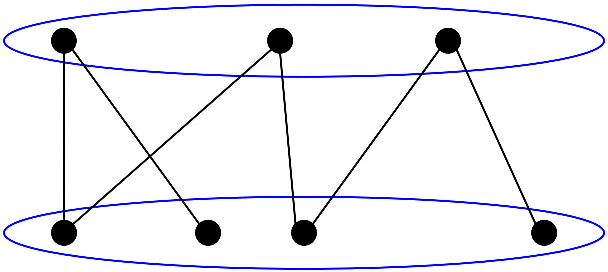
§10. Двудольные графы.

Опр. Двудольным графом называется обыкновенный граф, в котором вершины поделены на две части (доли), и каждое ребро соединяет вершины разных долей.



Теорема (критерий двудольности).
Граф является двудольным $\Leftrightarrow$ все циклы графа имеют четную длину (т.е. количество ребер в каждом цикле четное).

Теорема (критерий двудольности).
Граф является двудольным $\Leftrightarrow$ все циклы графа имеют четную длину (т.е. количество ребер в каждом цикле четное).

Доказательство:

$\Rightarrow$) Дано: граф G двудольный.

Для любого цикла $C = v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_1$ соседние вершины лежат в разных долях. Следовательно, все ребра в C можно разбить на пары (e_1, e_2), (e_3, e_4), $\ldots$: первое ребро в паре переходит из первой доли (где v_1) во вторую, второе ребро – обратно.

Количество ребер – четное.

$\Leftarrow$) Дано: все циклы графа G имеют четную длину. Пусть G связный.

Опр. Назовем расстоянием между вершинами u и v количество ребер в кратчайшей $(u - v)$ цепи.

Обозначение: $\mathrm{d}(u, v)$.
$(\mathrm{d}(u, u) = 0)$.

Зафиксируем вершину v_0. Соберем множества вершин:

$V_0 = \{v \mid d(v_0, v) - \textit{четное}\}$ (включая v_0);

$V_1 = \{v \mid d(v_0, v) - \textit{нечетное}\}$.

V_0 и V_1 – разбиение V.

Покажем, что любые две вершины из V_0 не смежны.

(от противного) Предположим вершины $v, w \in V_0$, $(v, w) \in E$.

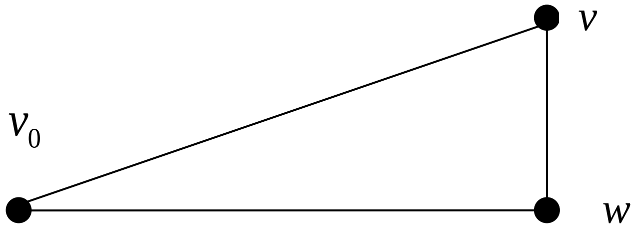
Пусть p_1 – кратчайшая $(v_0 - v)$ - цепь длины k,

p_2 – кратчайшая $(v_0 - w)$ - цепь длины ℓ, где k и ℓ – четные.

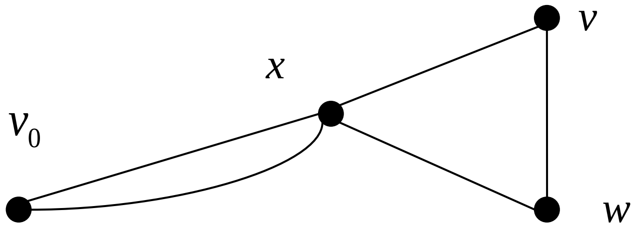
Заметим, что p_1 не проходит через w (иначе было бы $\ell + 1 = k$);

p_2 не проходит через v.

Если p_1 и p_2 не имеют общих вершин (кроме v_0), то получится цикл длины $k + \ell + 1$ = нечетное число – противоречие.



Если p_1 и p_2 имеют общую вершину ($\neq v_0$), то можно выбрать такую общую вершину x, ближайшую к v и w.



Получится цикл длины $k - d(v_0, x) + l - d(v_0, x) + 1$ = нечетное число – противоречие.

Предположение не верно, $(v, w) \notin E$.

Аналогично, любые две вершины из V_1 не смежны.

Замечание: для несвязного графа находим разбиение на доли в каждой компоненте связности, и собираем «первые» доли в одну долю всего графа G, «вторые» доли – в другую.

Следствие. Любое дерево является двудольным графом.

§11. Паросочетания. Венгерский алгоритм.

Опр. Паросочетанием в двудольном графе G называется множество P попарно не смежных ребер графа.

Опр. Максимальное паросочетание – содержащее наибольшее количество ребер.

Задача о максимальном паросочетании: для заданного двудольного графа G найти максимальное паросочетание.

Задача о максимальном паросочетании является удобной графовой моделью следующих задач.

1. Задача о различных представителях.

Дано: Множество X;

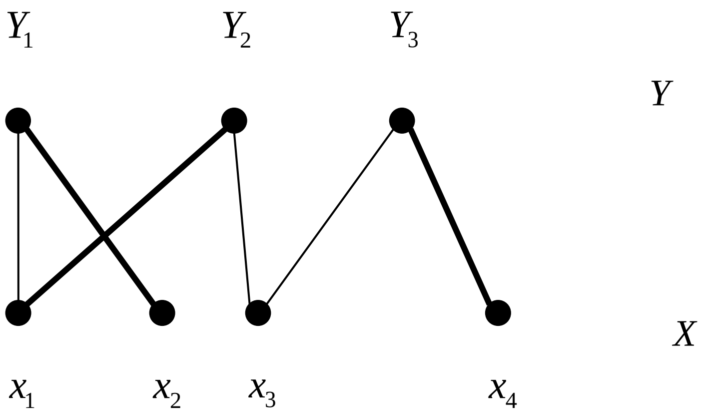
семейство непустых подмножеств $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}:\ Y_i \subseteq X$.

Найти: множество различных представителей семейства Y (трансверсаль), т.е.

$(y_1, y_2, \ldots, y_k):\ y_i \in Y_i,\ y_i \neq y_j$. (Если оно существует).

Преобразование задачи:

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_\ell\}$, $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ – вершины двудольного графа G. $(x_i, Y_j) \in E \Leftrightarrow x_i \in Y_j$.



Множеству различных представителей соответствует паросочетание, покрывающее всю долю Y, т.е. максимальное паросочетание.

2. Задача о назначениях.

Дано: X – множество работников (исполнителей);

Y – множество задач (проектов);

каждый работник может выполнить какие-то из проектов.

Найти: набор работников для выполнения задач, по одному на каждый проект.

3. Задача о свадьбах.

Дано: X – множество девушек;

Y – множество юношей;

каждый юноша знаком с какими-то девушками.

Найти: наибольшее количество пар, знакомых друг с другом, которых можно поженить.

Теорема (Холла о трансверсали).

Пусть X – множество, $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}:\ Y_i \subseteq X$ – семейство непустых подмножеств.

Множество различных представителей семейства Y существует $\Leftrightarrow$ для любого числа s = 1, …, k: любой набор из s множеств $Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_S}$ содержит не менее s различных элементов ($|Y_{i_1} \cup Y_{i_2} \cup \ldots \cup Y_{i_S}| \geq s$).

Венгерский алгоритм (автор Эгервари).

Для заданных двудольного графа G и паросочения P алгоритм проверяет его максимальность, и если Р не максимальное, алгоритм находит новое паросочетание P', большее чем P на одно ребро.

Вершины доли Y назовем «верхними», вершины доли X назовем «нижними». Вершины, не инцидентные ребрам паросочетания P назовем «свободными».

1. Выберем v_0 – «свободную», «верхнюю» ($v_0 \in Y$).

Обозначим $Y_0 = \{v_0\}$.

2. Построим $X_1, Y_2, X_3, Y_4, \ldots$:

$X_i = \{v \,|\,$ сущ. ребро (v, v') **в графе *G*,** $v' \in Y_{i-1}\} \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_{i-2})$,

для *i* = 1, 3, 5, …

$Y_i = \{v \,|\,$ сущ. ребро (v, v') **в паросоч. *P*,** $v' \in X_{i-1}\} \setminus (Y_0 \cup \ldots \cup Y_{i-2})$,

для *i* = 2, 4, 6, …

Процесс заканчивается на X_i или Y_i.

3. Если существует «свободная» вершина $\tilde{v}$ «нечетного индекса» p ($\tilde{v} \in X_i$), то существует $e_1, e_2, \ldots, e_p$ – чередующаяся $(v_0, \tilde{v})$-цепь, где $e_1 \notin P, e_2 \in P, e_3 \notin P, \ldots, e_p \notin P$ (ребра с нечетными номерами смежны ребрам из P).

Построим $P' = (P \setminus \{e_2, e_4, \ldots, e_{p-1}\}) \cup \{e_1, e_3, \ldots, e_p\}$ – паросочетание, количество ребер в котором на одно больше, чем в P.

4. Если не существует «свободной» вершины $\tilde{v}$ «нечетного индекса», то выберем другую вершину в качестве v_0 и повторим шаги 1, 2, 3.

5. Если для всех «свободных» «верхних» вершин (v_0) после шагов 1, 2, 3 не существует «свободной» вершины $\tilde{v}$ «нечетного индекса», то P – максимальное паросочетание.

Теорема (без доказательства). Для любого двудольного графа венгерский алгоритм дает решение задачи о максимальном паросочетании.