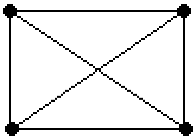
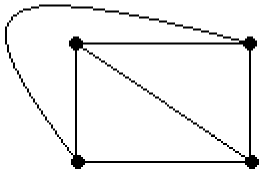
§12. Плоские и планарные графы. Теорема Эйлера о многогранниках.

Опр. Граф называется плоским, если ни какие два ребра не имеют общих точек, кроме вершин («ребра не пересекаются»).

Пример.



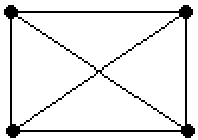
не плоский



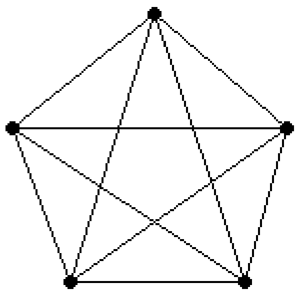
плоский

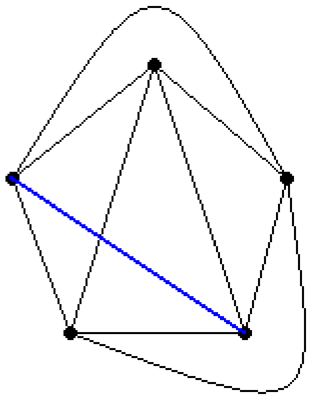
Опр. Граф называется планарным, если он изоморфен плоскому.

Пример. Планарный граф:



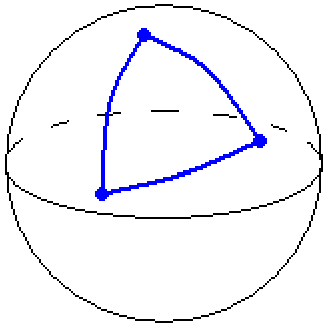
Непланарный граф:





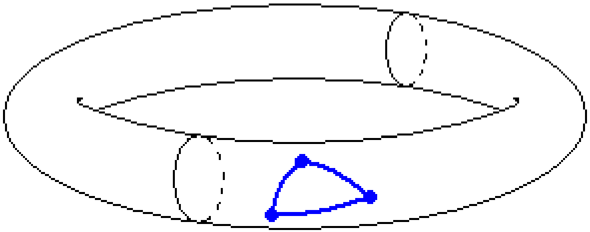
Опр. Укладкой графа G на плоскости называется рисунок на плоскости плоского графа, изоморфного G.

Опр. Укладкой графа G на сфере называется рисунок графа G на внешней части сферы, так, чтобы ребра не пересекались.

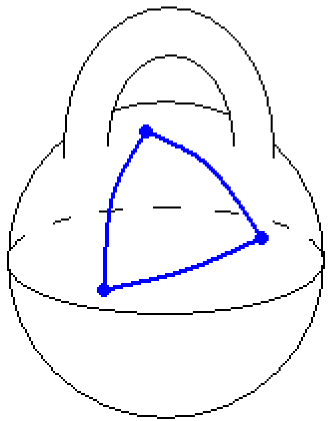


Замечание: укладка графа G на плоскости существует, если и только если существует укладка на сфере.

Опр. Укладкой графа G на торе называется рисунок графа G на внешней части тора, так, чтобы ребра не пересекались.



Опр. Укладкой графа G на сфере с одной ручкой называется рисунок графа G на внешней части сферы с ручкой, так, чтобы ребра не пересекались.



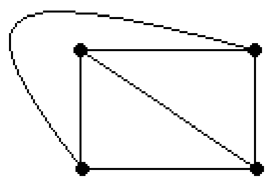
Замечание: укладка графа G на торе существует, если и только если существует укладка на сфере с одной ручкой.

Далее будем рассматривать только укладки на плоскости.

Опр. Гранью плоского графа называется максимальное множество точек плоскости, такое, что любые две точки можно соединить непрерывной линией, не пересекающейся во внутренних точках с рёбрами графа.

Границей грани называется набор вершин и рёбер, входящих в состав грани.

Пример.

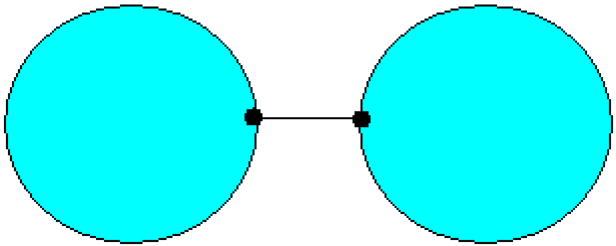


Опр. Внешней гранью называется грань, которую нельзя ограничить замкнутой кривой линией.

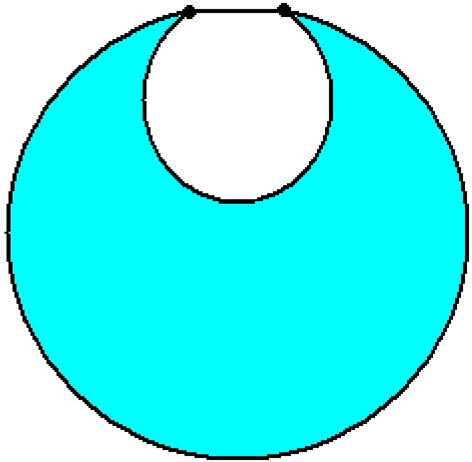
Теорема.
Для любого планарного графа существует укладка на плоскости, такая, что любая выбранная вершина (любое ребро) принадлежит внешней грани.

Теорема.
Пусть G – плоский граф. Если ребро e является мостом, то e принадлежит ровно одной грани. Если ребро e не является мостом, то e принадлежит ровно двум граням.

Доказательство (иллюстрация):
1)



2)



Теорема (Эйлера о многогранниках).
Для любого связного плоского графа G выполняется $n - m + r = 2$, где n – количество вершин, m – количество рёбер, r – количество граней в G.

Доказательство:
1. Если G – дерево, то $n = m + 1$, $r = 1$. Следовательно $n - m + r = (m+1) - m + 1 = 2$.

2. Если G не является деревом, то существует ребро e, принадлежащее циклу. Т.к. e не является мостом, e принадлежит ровно двум граням P_1 и P_2, одна из которых внешняя. Тогда граф $G' = G \setminus e$ связный, плоский, где грани P_1 и P_2 склеились в одну внешнюю грань.

Т.о. в G' количество вершин $n' = n$, количество рёбер $m' = m - 1$, количество граней $r' = r - 1$.
Получаем $n' - m' + r' = n - (m - 1) + (r - 1) = n - m + r$.

3. Удаляя последовательно рёбра, принадлежащие циклу, получим каркас графа G, т.е. дерево. При этом величина $n - m + r$ сохраняется. Следовательно, $n - m + r = 2$.

Теорема (обобщение теоремы Эйлера о многогранниках).
Для любого плоского графа G выполняется $n - m + r = 1 + c$, где
n – количество вершин, m – количество рёбер, r – количество граней,
c – количество компонент связности в G.

§13. Следствия из теоремы Эйлера о многогранниках. Критерии планарности

Следствие 1. Граф K_5 не планарен.

Доказательство: (от противного) Предположим, что K_5 планарен, т.е. существует плоский граф G, изоморфный K_5. В G выполняется $n = 5$, $m = 10$. Тогда по теореме Эйлера о многогранниках выполняется $5-10+r=2$. Следовательно, $r=7$.

Граф G, как и K_5, не содержит мостов $\Rightarrow$ каждое ребро принадлежит ровно двум граням.

Организуем подсчёт рёбер, проходя по каждой грани, подсчитывая ребра, ограничивающие грань. Каждая грань ограничена не менее чем тремя рёбрами. Следовательно, выполняется

$$20 = 2 \cdot m = \sum_{i=1}^{7} k_i \geq \sum_{i=1}^{7} 3 = 3 \cdot 7 = 21.$$

Противоречие.

Следствие 2. Граф $K_{3,3}$ не планарен.

Доказательство: (от противного) Предположим, что $K_{3,3}$ планарен, т.е. существует плоский граф G, изоморфный $K_{3,3}$. В G выполняется $n = 6$, $m = 9$. Тогда по теореме Эйлера о многогранниках выполняется $6-9+r=2$. Следовательно, $r=5$.

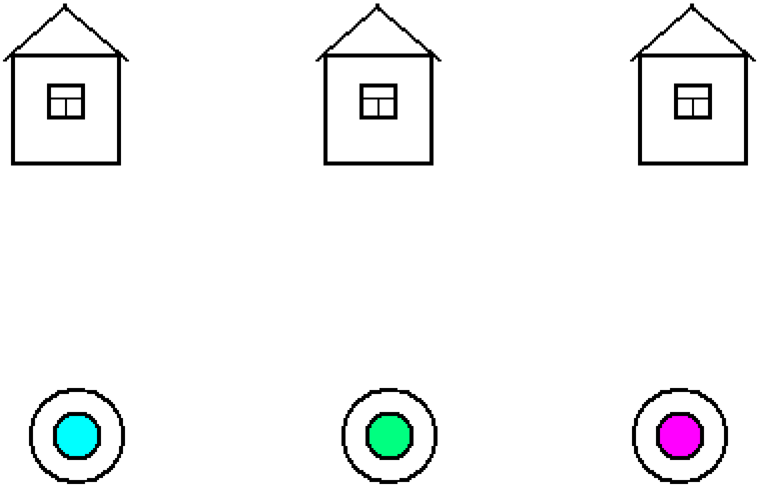
Граф G, как и $K_{3,3}$, не содержит мостов $\Rightarrow$ каждое ребро принадлежит ровно двум граням.

Организуем подсчёт рёбер, проходя по каждой грани, подсчитывая ребра, ограничивающие грань. В $K_{3,3}$ нет треугольников, поэтому каждая грань ограничена не менее чем четырьмя рёбрами. Следовательно, выполняется

$$18 = 2 \cdot m = \sum_{i=1}^{5} k_i \geq \sum_{i=1}^{5} 4 = 4 \cdot 5 = 20.$$

Противоречие.

Пример. «Задача о трёх домах и трёх колодцах».

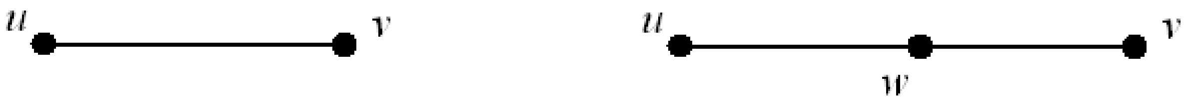


Вопрос: можно ли проложить тропинки от каждого дома к каждому колодцу, так, чтобы они не пересекались?

Если взять три дома как вершины одной доли графа, а три колодца как вершины второй доли графа, то задача равносильна построению рисунка графа $K_{3,3}$, так, чтобы рёбра не пересекались.

$\Rightarrow$ Ответ в задаче: нет, такие тропинки проложить нельзя.

Опр. Будем говорить, что граф G получен из графа H операцией введения вершины степени 2, если ребро (u, v) в H заменено на два ребра (u, w) и (w, v), смежные новой вершине w степени 2.



H G

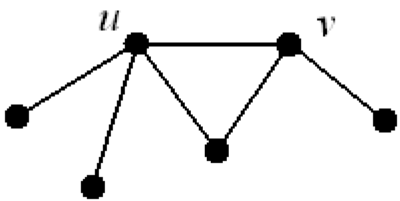
Очевидно, что G плоский $\Leftrightarrow$ H плоский.

Опр. Два графа G_1 и G_2 называются гомеоморфными, если они получены из одного графа H последовательными применениями операции введения вершины степени 2.

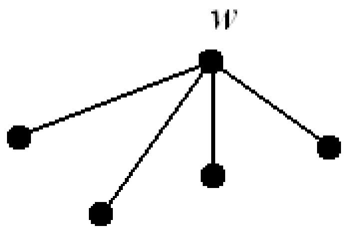
Замечание: в частности, каждый из G_1 и G_2 гомеоморфен H.

Теорема (Понтрягина-Куратовского, критерий планарности). Граф является планарным $\Leftrightarrow$ граф не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Опр. Будем говорить, что граф H получен из графа G операцией элементарного стягивания по ребру (u, v), если ребро (u, v) и вершины u и v в G заменены новой вершиной w, смежной с вершинами, которым была смежна u или v, или обе u и v.



G



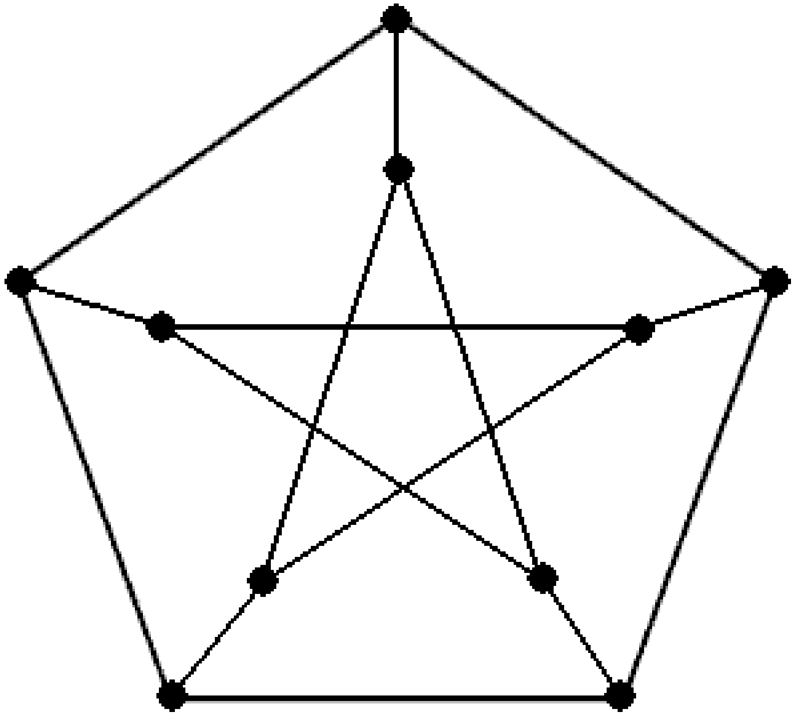
H

Очевидно, что если G плоский, то H плоский.

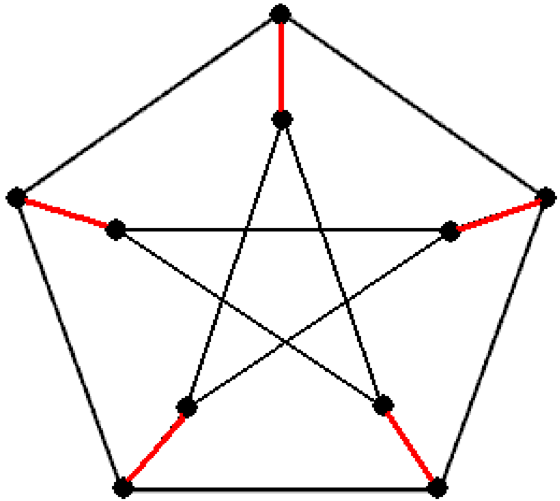
Опр. Граф G стягивается к графу H, если H получен из G последовательным применением операций элементарного стягивания.

Теорема (Двойственная теорема Понтрягина-Куратовского, второй критерий планарности).
Граф является планарным $\Leftrightarrow$ граф не содержит подграфов, стягиваемых к K_5 или $K_{3,3}$.

Пример.
Граф Петерсона.

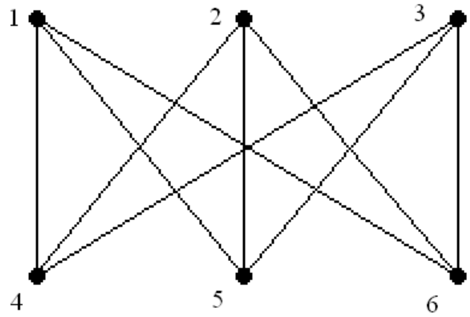


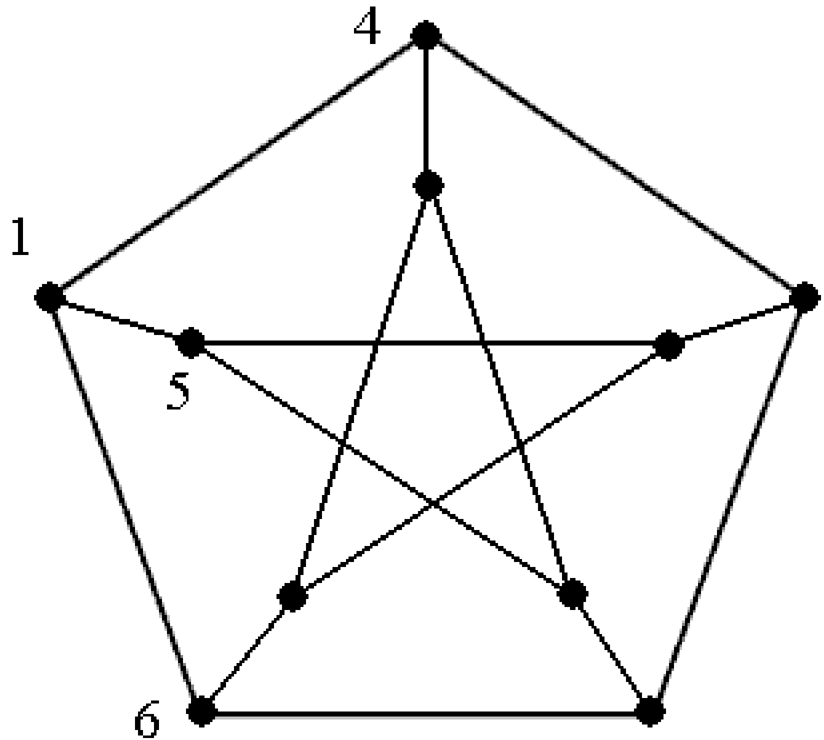
По двойственной теореме Понтрягина-Куратовского граф непланарен, т.к. его можно стянуть к K_5 по рёбрам, помеченным красным цветом.

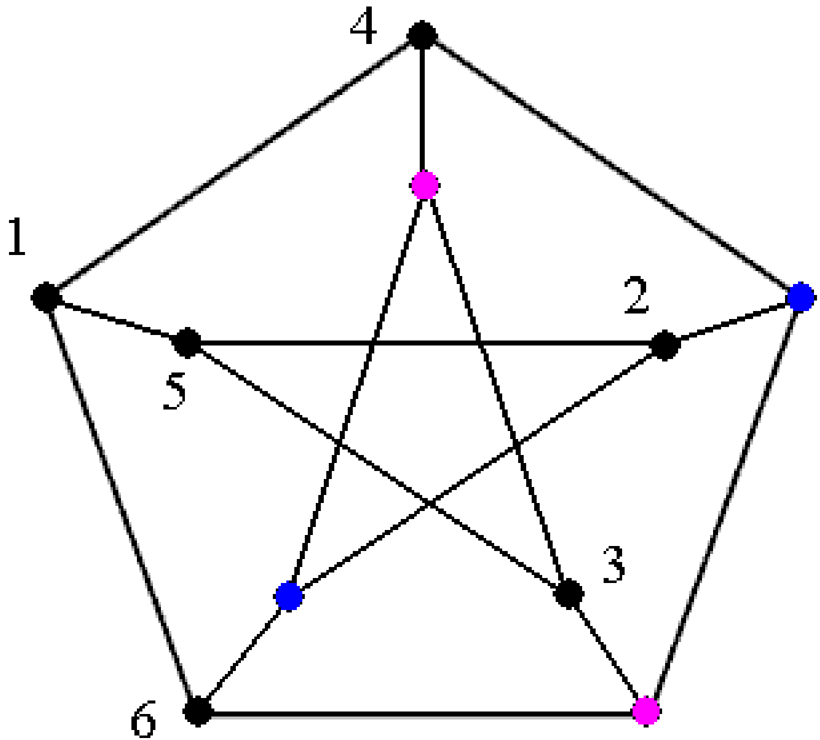


Покажем применение первого критерия для доказательства непланарности графа Петерсона.

Т.к. в графе Петерсона степени всех вершин равны 3, найти подграф, гомеоморфный K_5, нельзя. Следовательно, существует подграф, гомеморфный $K_{3,3}$. Будем использовать следующий образец для выбора вершин на роль вершин одной доли (1, 2, 3) и на роль вершин второй доли (4, 5, 6).




4
1
5
6


4
1
2
5
3
6

Убрав некоторые рёбра, получаем подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$.