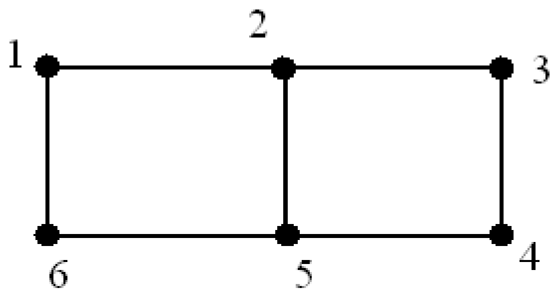
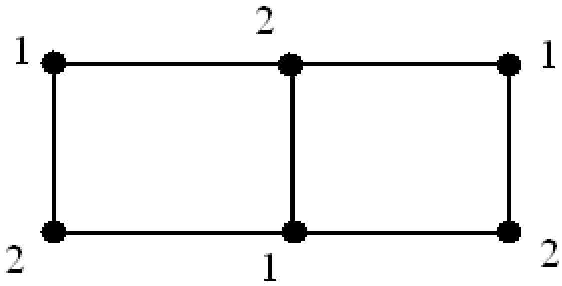
§14. Раскраска графа. Хроматическое число

Опр. Правильной раскраской обыкновенного графа $G = (V, E)$ в k цветов называется функция $f : V \to \{1,2,...,k\}$, такая, что для любого ребра (u, v) выполняется $f(u) \neq f(v)$ (т.е. концы ребра покрашены в разные цвета).

Пример. Следующий граф можно правильно раскрасить в 6 цветов.



Однако этот же граф можно правильно раскрасить и меньшим количеством цветов. Например, раскраска в 2 цвета:



Опр. Хроматическим числом графа G называется наименьшее число цветов (красок), для которого существует правильная раскраска графа.

$\chi(G)$

Опр. Оптимальной раскраской графа G называется правильная раскраска в $\chi(G)$ цветов.

Замечание: если $\chi(G) = k$, то множество вершин графа можно разбить на k частей (долей), так, что любое ребро соединяет вершины из разных долей. Такой граф называется k-дольным.

Теорема.
Граф G имеет $\chi(G) = 2 \;\Leftrightarrow\;$ длина всех циклов чётная.

Замечание: если граф G несвязный, и каждую компоненту можно правильно раскрасить в k цветов, то и G можно правильно раскрасить в k цветов.

Теорема.
Если граф G содержит несколько блоков (компонент двусвязности), и каждый блок можно правильно раскрасить в k цветов, то и G можно правильно раскрасить в k цветов.

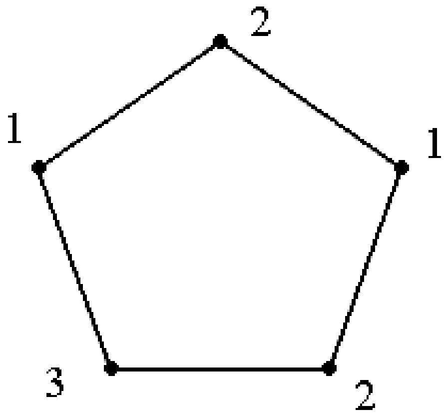
Опр. Плотностью графа G называется количество вершин в наибольшем подграфе, являющемся полным K_n.

$\varphi(G) = n$

Теорема.
Для любого графа $\chi(G) \geq \varphi(G)$.

Доказательство:
Очевидно, что граф K_n можно правильно раскрасить, используя не менее n цветов.

Однако существует пример, когда $\chi(G) \neq \varphi(G)$:



$\chi(G) = 3$; $\varphi(G) = 2$.

Теорема.
Для любого $k > 2$ существует граф G, у которого $\varphi(G) = 2$, $\chi(G) = k$.

Доказательство:
Пусть $\varphi(G) = 2$ (граф без треугольников).
(индукция по k)
Б.И. $k = 3$. Любой G, совпадающий с циклом нечётной длины, большей 3, имеет $\chi(G) = 3$.

Ш.И. Пусть существует граф G_{k-1}, у которого $\varphi(G_{k-1})=2$, $\chi(G_{k-1})=k-1$. Обозначим вершины графа $\{u_1,\ldots,u_n\}$. Построим граф, добавив к G_{k-1} вершины $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Для каждого i соединим рёбрами v_i со всеми вершинами, смежными u_i в G_{k-1} (т.е. каждая v_i является «двойником» вершины u_i). Затем добавим одну вершину w, соединяя её со всеми $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Обозначим получившийся граф G_k.

Тогда $\varphi(G_k)=2$ (треугольники не появляются).

Правильная раскраска графа G_k :

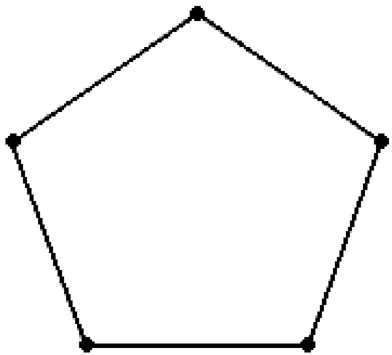
1) вершины $\{u_1, \ldots, u_n\}$ раскрашиваем в (k – 1) цветов как в правильной раскраске G_{k-1} ;

2) каждую v_i красим в тот же цвет, что и u_i ;

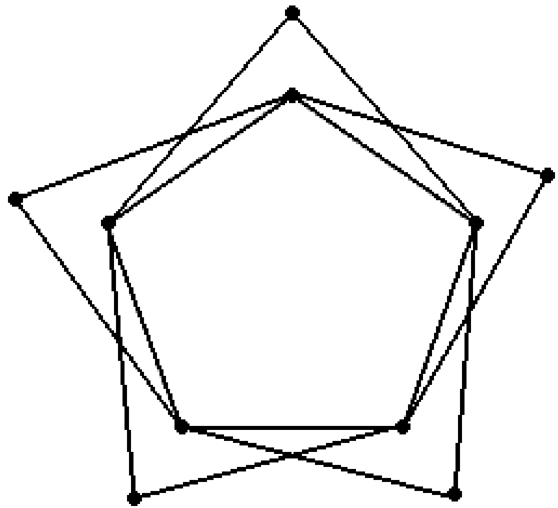
3) вершину w красим в цвет с номером k.

Следовательно, $\chi(G_k) = k$.

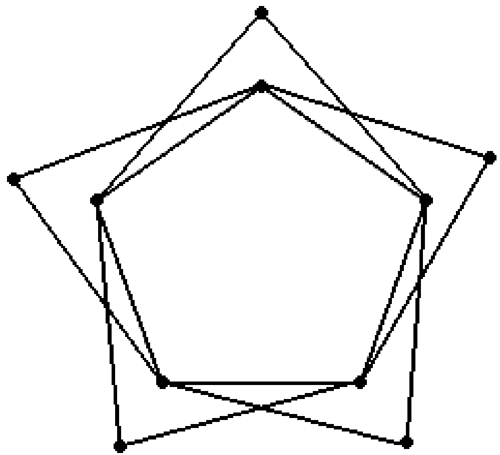
Пример. Построение G_4.
Добавление «двойников»:

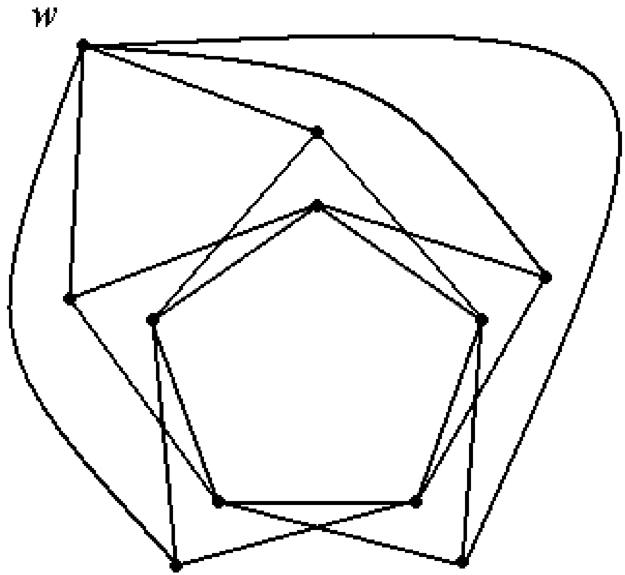


G_3



Добавление вершины *w*:





Опр. Независимым множеством в графе G называется множество попарно несмежных вершин.

Опр. Числом независимости графа G называется наибольшее количество вершин независимого множества.

Обозначение: $\beta(G)$.

Теорема.

Для любого графа G выполняется $\chi(G) \geq \dfrac{n}{\beta(G)}$.

Плотность графа и число независимости дают оценки снизу.
Оценки сверху – ?

Теорема (Брукса).
Пусть G – связный неполный граф, максимальная степень вершин $\Delta(G) \geq 3$. Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Замечание: в теореме Брукса дается оценка всех графов, кроме двух исключений: полного графа и цикла нечетной длины.

Для K_n : $\Delta(K_n) = n - 1$, $\chi(K_n) = n$.

Для цикла нечетной длины C_n : $\Delta(C_n) = 2$, $\chi(C_n) = 3$.

§15. Раскраска планарного графа

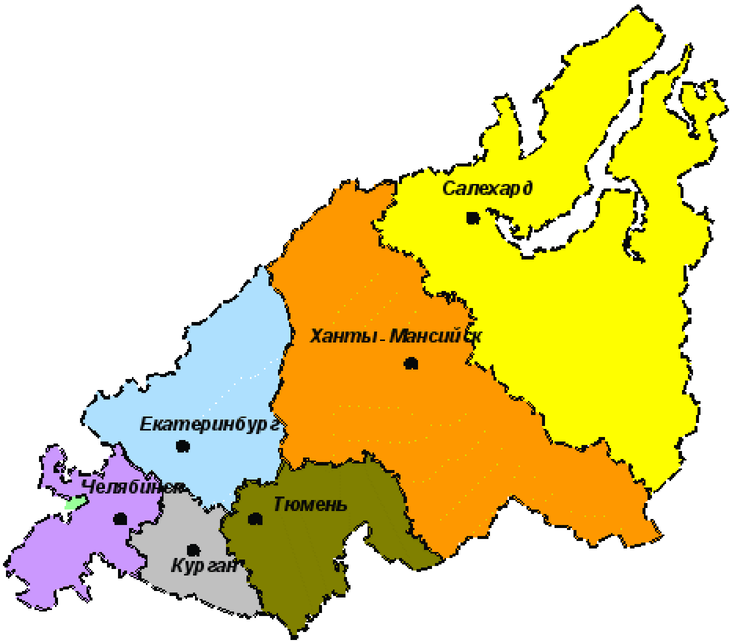
Проблема раскраски графа связано со знаменитой проблемой о раскраске географической карты (1852 или 1879 г.).

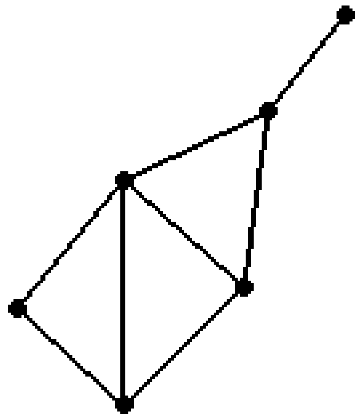
Гипотеза о 4-х красках – любую географическую карту можно раскрасить 4-мя красками, так, чтобы соседние области (страны) были окрашены по-разному.

Задача о раскраске географической карты сводится к правильной раскраске графа, в котором вершины соответствуют областям (или странам), две вершины соединены ребром, если соответствующие области имеют общую границу не нулевой длины.

По построению такой граф будет плоским, поэтому рассматриваем задачу о раскраске плоского (планарного) графа.

Пример. Уральский федеральный округ.





Плоский обыкновенный граф.

Гипотеза о 4-х красках → Теорема о 4-х красках

Теорема (о 4-х красках).
Каждый плоский граф можно правильно раскрасить 4-мя красками.

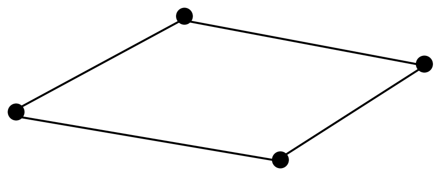
Существует простое доказательство теоремы Хивуда о 5-и красках:
Каждый плоский граф можно правильно раскрасить 5-ю красками.

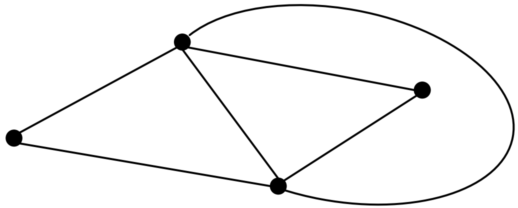
Теорема (о 4-х красках).
Каждый плоский граф можно правильно раскрасить 4-мя красками.

Основные результаты, лежащие в основе доказательства теоремы:

1. Максимальный плоский граф с $n \geq 3$, является плоской триангуляцией, т.е. связным плоским графом, в котором каждая грань является треугольником.

Замечание: в плоской конфигурации нет петель, но могут быть кратные ребра.
Пример.





2. В любой плоской триангуляции количество рёбер $m = 3n - 6$, где количество вершин $n \geq 3$.

Доказательство:

$n - m + r = 2$;

$$2m = \sum_{i=1}^{r} 3 = 3r.$$

$\Rightarrow$ $2m = 3(2 - n + m)$ $\Rightarrow$ $m = 3n - 6$.

Следствие. В любом плоском графе с $n \geq 3$ выполняется $m \leq 3n - 6$.

3. В любом плоском графе с $n \geq 3$ существует вершина u степени $\rho(u) \leq 5$.

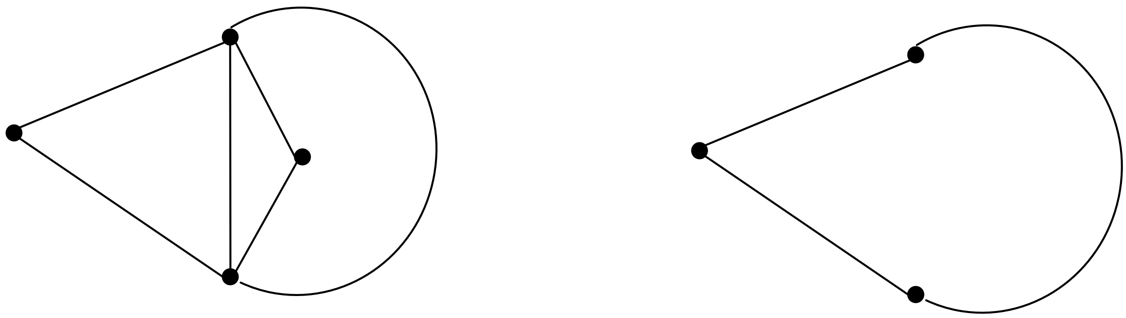
Доказательство: (от противного) Предположим, что у каждой вершины степень $\rho(u) \geq 6$.

Тогда $2m = \sum_{v \in V} \rho(v) \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n > 3n - 6$. Противоречие.

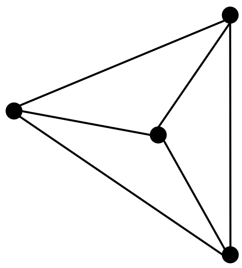
4. Каждая плоская триангуляция может быть сконструирована из набора «неизбежных конфигураций», по правилам, сохраняющим возможность правильной раскраски в цвета. Список «неизбежных конфигураций» содержит 1482 конфигурации.

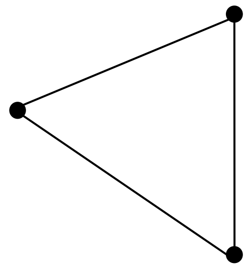
Примеры.

1.

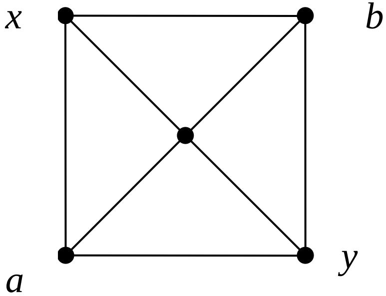


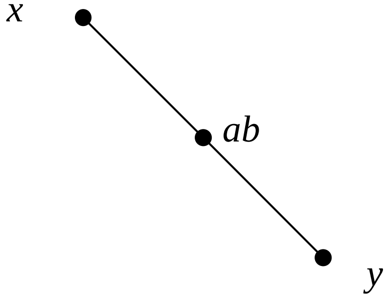
2.





3. Вершины a и b не смежны:





5. В 1976 году (1977) К.Аппель и В.Хейкен опубликовали статью о том, что используя компьютер (ЭВМ) ими построены 4-раскраски всех «неизбежных конфигураций».

6. Многочисленные ошибки исправлялись до 1997 года.