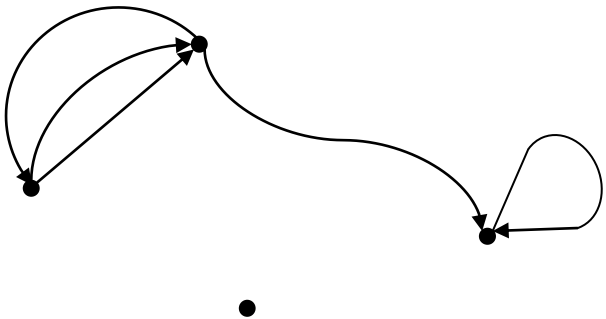
§16. Ориентированные графы: основные определения

Опр. (как рисунок)
Ориентированным графом называется рисунок, состоящий из точек, соединенных ориентированными линиями.

Вершина графа – каждая точка.

Дуга графа – каждая ориентированная линия, идущая от одной вершины (начало дуги) ко второй вершине (конец дуги).



Кратные дуги.

Петли.

Опр. (как алгебраическая структура)
Ориентированным графом (орграфом) называется пара (V, E), где V – множество вершин, E – множество дуг (ориентированных ребер), т.е. если $e \in E$, то $e = (u, v) \in V \times V$, (причем $(u, v) \neq (v, u)$).

Замечание: Орграф без кратных ребер совпадает с бинарным отношением, заданным рисунком (граф бинарного отношения).

Опр. Две вершины u и v называются смежными, если существует дуга (u, v) или (v, u).

Опр. Вершина инцидентна дуге, если эта вершина является началом или концом дуги.

Дуга выходит из вершины, если вершина является началом дуги.

Дуга заходит в вершину, если вершина является концом дуги.

(Степень вершины)

Опр. Полустепень исхода вершины u – число $\rho_{out}(u)$ равное количеству дуг, выходящих из u.

Полустепень захода вершины u – число $\rho_{in}(u)$ равное количеству дуг, входящих в u.

Утверждение. Сумма полустепеней исхода всех вершина графа равна сумме полустепеней захода всех вершин, и равна количеству дуг в графе.

Опр. Изолированной вершиной называется вершина, полустепени исхода и захода которой равны 0.

Опр. Ориентированным маршрутом в орграфе называется последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k$, в которой каждая дуга e_i выходит из вершины v_i и заходит в вершину v_{i+1}.

Опр. Путем в орграфе называется ормаршрут, в котором все дуги различны.

Опр. Простым путем в орграфе называется путь, в котором все вершины различны.

Опр. Контуром в орграфе называется путь $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_1$, в котором первая и последняя вершины совпадают, и количество дуг больше нуля.

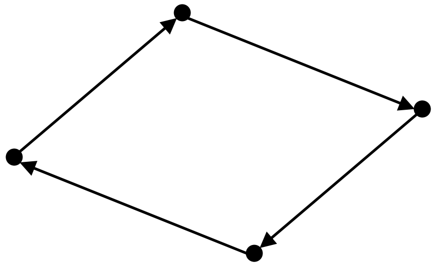
Опр. Простым контуром в орграфе называется контур, в котором все вершины различны (кроме совпадающих первой и последней вершин).

(Связность)
Опр. Вершина v достижима из вершины u, если существует путь, начинающийся в u, заканчивающийся в v ($(u-v)$-путь).

Опр. Вершины u и v сильно связаны, если v достижима из u, и u достижима из v.

Опр. Орграф называется сильно связным, если любые две вершины сильно связаны.

Пример.
Сильно связный граф:



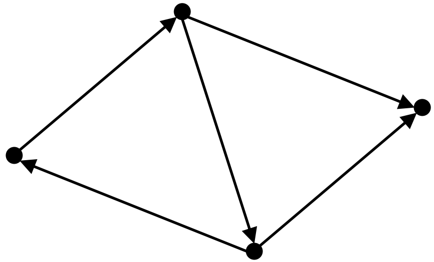
Теорема (критерий сильной связности).
Орграф G является сильно связным $\Leftrightarrow$ в G существует замкнутый ормаршрут, проходящий по всем вершинам орграфа.

Опр. Подграфом орграфа (V, E) называется орграф (V', E') , где $V' \subseteq V, E' \subseteq E$.

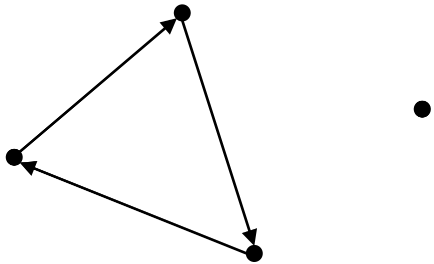
Опр. Компонентой сильной связности орграфа называется максимальный по включению подграф, являющийся сильно связным орграфом.

Замечание: набор компонент сильной связности орграфа является разбиением множества вершин орграфа.

Пример. В орграфе на рисунке



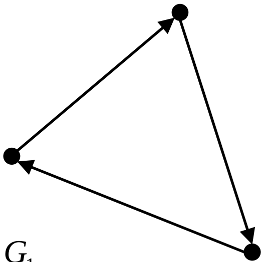
две компоненты сильной связности:



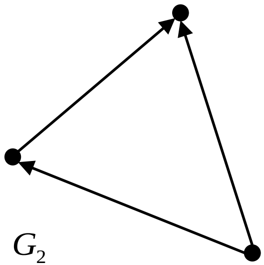
Опр. Два орграфа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если существует биекция $\delta : V_1 \to V_2$, такая, что для любых вершин u и v количество дуг (u, v) в E_1 равно количеству дуг $(\delta(u), \delta(v))$ в E_2.

Пример.

Не изоморфные орграфы G_1 и G_2.



G_1



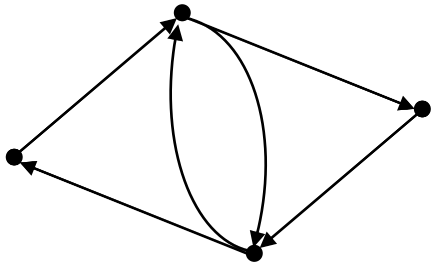
G_2

§17. Эйлеровы, гамильтоновы, деревья, бесконтурные орграфы

Опр. Орграф называется эйлеровым, если в нем существует контур, проходящий по всем дугам.

Теорема (аналог теоремы Эйлера о циклах).
Пусть орграф G без изолированных вершин.
Орграф G эйлеров $\Leftrightarrow$ G сильно связный, и для каждой вершины u:
$\rho_{out}(u) = \rho_{in}(u)$.

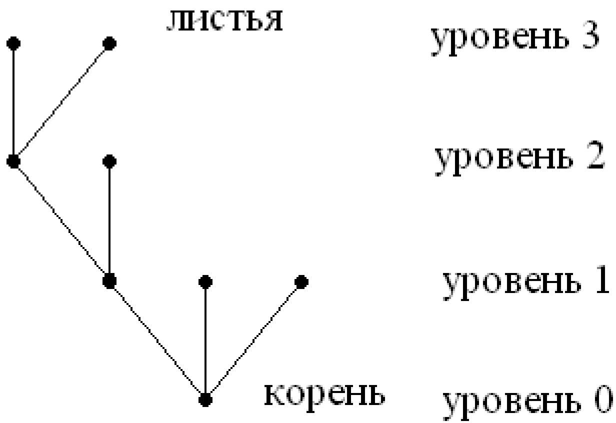
Пример.
Эйлеров орграф.



Опр. Орграф называется гамильтоновым, если в нем существует простой контур, проходящий по всем вершинам.

Теорема (аналог теоремы Дирака).
Пусть G – сильно связный граф без петель и кратных дуг, содержащий n вершин, и для каждой вершины u выполняется $\rho_{out}(u) \geq \frac{n}{2}$ и $\rho_{in}(u) \geq \frac{n}{2}$. Тогда G гамильтонов.

(Дерево)



Добавив направление на ребрах от меньшего уровня к большему, получим орграф.

Опр. Орграф называется ориентированным деревом, если:

1) существует единственная вершина (корень), у которой $\rho_{in}(u) = 0$;

2) для любой вершины u, не равной корню, $\rho_{in}(u) = 1$;

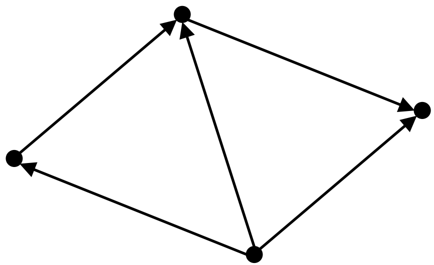
3) для любой вершины u, не равной корню, существует путь из корня в u.

Теорема (аналог теоремы о деревьях).

Пусть G – ориентированное дерево с корнем v_0. Тогда G не содержит контуров, и для любой вершины u, не равной корню, существует единственный простой путь из v_0 в u.

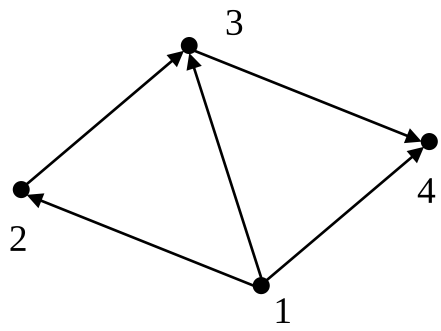
Замечание: существуют орграфы, помимо деревьев, также не содержащие контуров.

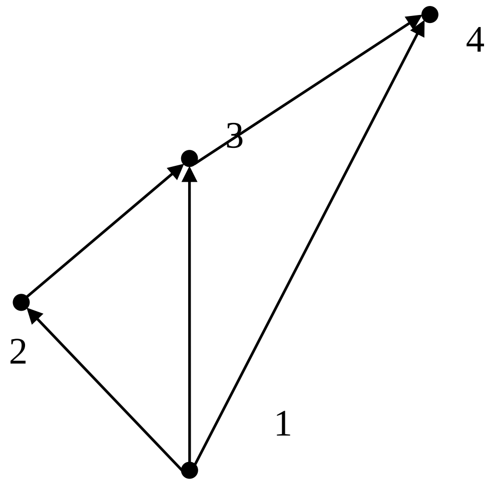
Пример.



Теорема.
В любом бесконтурном орграфе можно линейно упорядочить вершины $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, так, чтобы любая дуга (v_i, v_j) выходила из вершины с меньшим номером, и заходила в вершину с большим номером ($i < j$).

Пример.





Расположение вершин бесконтурного орграфа по этажам.