Глава IV. Алгебраические системы

§1. Алгебраические операции

Опр. Бинарной операцией на A называется всюду определенное отображение $\varphi\colon\ A\times A\to A$.

$\varphi(x_1, x_2)$ – префиксная запись результата операции для (x_1, x_2);

$x_1\ \varphi\ x_2$ – инфиксная запись результата операции для (x_1, x_2).

Опр. Таблица Кэли –

		$\overbrace{\hphantom{\cdots}}^{}$	$\overbrace{\hphantom{x_j}}^{A}$	$\overbrace{\hphantom{\cdots}}^{}$
		$\cdots$	x_j	$\cdots$
	$\vdots$			
A	x_i		$\varphi(x_i, x_j)$	
	$\vdots$			

Опр. Операция φ называется ассоциативной, если для любых $x, y, z \in A$, выполняется $(x \varphi y) \varphi z = x \varphi (y \varphi z)$.

Опр. Операция φ называется коммутативной, если для любых $x, y \in A$, выполняется $x \varphi y = y \varphi x$.

Опр. Операция φ называется дистрибутивной слева относительно ψ, если для любых $x, y, z \in A$, выполняется $x\,\varphi\,(y\,\psi\,z) = (x\,\varphi\,y)\,\psi\,(x\varphi\,z)$.

Опр. Операция φ называется дистрибутивной справа относительно ψ, если для любых $x, y, z \in A$, выполняется $(y\,\psi\,z)\,\varphi\,x = (y\,\varphi\,x)\,\psi\,(z\,\varphi\,x)$.

Опр. Операция φ называется дистрибутивной относительно ψ, если она дистрибутивной слева и дистрибутивной справа.

Опр. Элемент e называется нейтральным относительно операции φ, если для любого $x \in A$, выполняется $x \, \varphi \, e = e \, \varphi \, x = x$.

Теорема. Если нейтральный элемент относительно операции φ существует, то он единственный.

Доказательство:
Предположим, что элементы e_1 и e_2 – нейтральные элементы относительно операции φ. Тогда

$$e_1 = e_1 \, \varphi \, e_2 = e_2 \quad .$$

Опр. Элемент b называется обратным к элементу a (относительно операции φ), если выполняется $a \,\varphi\, b = b \,\varphi\, a = e$.

Теорема. Если существует обратный к элементу a относительно ассоциативной операции φ, то он единственный.

Доказательство:
Предположим, что элементы b и c – обратные к элементу a. Тогда

$$(b \,\varphi\, a) \,\varphi\, c = e \,\varphi\, c = c \;;$$

$$(b \,\varphi\, a) \,\varphi\, c = b \,\varphi\, (a \,\varphi\, c) = b \,\varphi\, e = b \,;$$

т.е. $b = c$.

Обозначение: a^{-1} – обратный к элементу a.

Опр. Унарной операцией на A называется всюду определенное отображение $\varphi\colon\ A \to A$.

Пример. Если для любого $x \in A$ существует x^{-1}, то на A определена унарная операция «взятия обратного элемента».

Опр. Нуль-арной операцией на A называется выделенный элемент в A.

Пример. Если в A существует нейтральный элемент e, то на A определена нуль-арная операция «нейтрального элемента».

§2. Основные алгебраические системы: группоид, полугруппа, группа, кольцо, поле.

Опр. Группоидом называется (A, φ), где $A \neq \varnothing$, φ – бинарная операция на A.

Опр. Полугруппой называется группоид (A, φ), где φ – ассоциативная.

Опр. Коммутативной полугруппой называется полугруппа (A, φ), где φ – коммутативная.

Опр. Группой называется полугруппа (A, φ), где существует нейтральный элемент, и для любого элемента существует обратный.

Замечание: Группа – $(A, \varphi, e, {}^{-1})$.

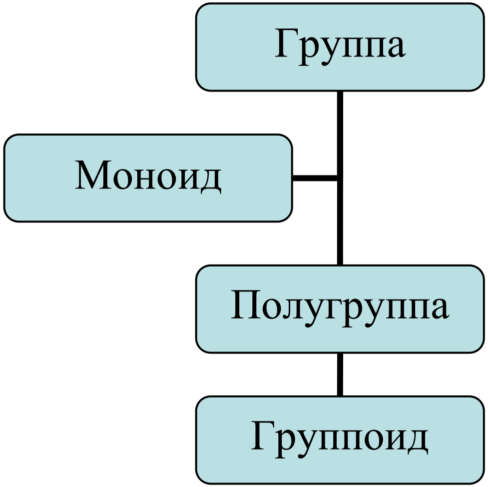
Опр. (Коммутативной) Абелевой группой называется группа (A, φ), где φ – коммутативная.

Аксиомы группы:

1) $(x \,\varphi\, y)\,\varphi\, z = x \,\varphi\, (y \,\varphi\, z)$;

2) $x \,\varphi\, e = e \,\varphi\, x = x$;

3) $x \,\varphi\, x^{-1} = x^{-1} \,\varphi\, x = e$.



Любое уравнение $a \varphi x = b$ (или $x \varphi a = b$) имеет единственное решение:

$x = a^{-1} \varphi b$

(или $x = b \varphi a^{-1}$.

Замечание:

$(A, +, 0, -)$ – аддитивная запись группы (предполагается коммутативность);

$(A, \cdot, 1, {}^{-1})$ – мультипликативная запись группы.

Опр. Кольцом называется $(A, +, \cdot)$, где + бинарная операция «сложения», · бинарная операция «умножения», такие, что:

1) $(A, +)$ – абелева группа $(A, +, 0, -)$;

2) умножение дистрибутивно относительно сложения.

Опр. Кольцом называется $(A, +, \cdot\,)$, где $+$ бинарная операция «сложения», $\cdot$ бинарная операция «умножения», такие, что:
1) $(A, +)$ – абелева группа $(A, +, 0, -)$;
2) умножение дистрибутивно относительно сложения.

Опр. Ассоциативным кольцом называется кольцо, где умножение ассоциативно.

Опр. Коммутативным кольцом называется кольцо, где умножение коммутативно.

Опр. Кольцом с единицей называется кольцо, где существует нейтральный элемент 1 относительно умножения.

Аксиомы кольца:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2) $x + 0 = 0 + x = x$;

3) $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

4) $x + y = y + x$;

5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Опр. Полем называется коммутативно-ассоциативное кольцо с единицей $(A, +, \cdot\ )$, где $|A| \geq 2$, и для любого ненулевого элемента существует обратный относительно умножения.

Аксиомы поля:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2) $x + 0 = 0 + x = x$;

3) $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

4) $x + y = y + x$;

5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

аксиомы кольца

6) $x \cdot y = y \cdot x$

7) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

8) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

9) для $x \neq 0$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

почти группа (абелева)