§6. Подсистемы и изоморфизм

Опр. Пусть (A, φ) – полугруппа. Подполугруппой называется множество $B \subseteq A$, замкнутое относительно φ (т.е. (B, φ) – тоже полугруппа).

Опр. Подполугруппой, порожденной множеством M, называется пересечение всех подполугрупп, содержащих M.

Обозначение: $< M >$.

Опр. Пусть (A, φ) – группа. Подгруппой называется множество $B \subseteq A$, такое, что (B, φ) – тоже группа (т.е. B замкнуто относительно бинарной операции φ, нуль-арной операции нейтрального элемента, и унарной операции взятия обратного элемента).

Опр. Подгруппой, порожденной множеством M, называется пересечение всех подгрупп, содержащих M.

Обозначение: $< M >$.

Опр. Пусть $(A, +, \cdot)$ – кольцо (поле). Подкольцом (подполем) называется множество $B \subseteq A$, такое, что $(B, +, \cdot)$ – тоже кольцо (поле).

Опр. Группоид (A_1, φ) изоморфен группоиду (A_2, ψ), если существует биекция $\delta: A_1 \to A_2$, сохраняющая операцию, т.е. если $a \varphi b = c$, то $\delta(a) \psi \delta(b) = \delta(c)$.

Замечание: $\delta(a \varphi b) = \delta(a) \psi \delta(b)$.

Теорема.

Пусть группоиды (A_1, φ) и (A_2, ψ) изоморфны.

Если (A_1, φ) – полугруппа, то (A_2, ψ) – тоже полугруппа.

Если (A_1, φ) – группа, то (A_2, ψ) – тоже группа, при этом $\delta(e_\varphi) = e_\psi$, и $\delta(x^{-1}) = (\delta(x))^{-1}$.

Теорема.
Всякая полугруппа изоморфна подполугруппе симметрической полугруппы над подходящим множеством.

Теорема.
Всякая полугруппа изоморфна подполугруппе симметрической полугруппы над подходящим множеством.

Доказательство: Пусть $(A, \cdot\ )$ – произвольная полугруппа.

1 случай) A содержит нейтральный элемент e.
Возьмем $M = A$. Рассмотрим симметрическую полугруппу $(S, *)$ над M.

Для каждого $a \in A$ обозначим $f_a : M \to M$, такую, что $f_a(x) = x \cdot a$.

(В таблице Кэли все значения f_a образуют столбец, соответствующий a).

Соберем в множество B все такие отображения. Очевидно, $B \subseteq S$.

Покажем, что $(B, *)$ подполугруппа:

для любых $f_a, f_b \in B$ выполняется $(f_a * f_b)(x) = f_b(f_a(x)) =$

$= (x \cdot a) \cdot b = x \cdot (a \cdot b) = f_{a \cdot b}(x)$,

т.е. $f_a * f_b \in B$.

Осталось показать, что $(A, \cdot\,)$ изоморфна $(B, *)$.

Укажем биекцию $\delta: A \to B$, такую, что $\delta(a) = f_a$.

δ всюду определенное, сюръективное – по построению.

δ инъективное, т.к. при $a \neq b$, $f_a(e) = e \cdot a = a \neq f_b(e)$, $f_a \neq f_b$.

Биекция сохраняет операцию, т.к. $(f_a * f_b)(x) = f_{a \cdot b}(x)$.

2 случай) A не содержит нейтральный элемент e.

Построим полугруппу $(A \cup \{e\}, \cdot\ )$, где e действует как нейтральный элемент.

Возьмем $M = A \cup \{e\}$, найдем подполугруппу $(B, *)$ симметрической полугруппы $(S, *)$ над M, как в случае 1.

Тогда $(B \backslash \{ f_e \}, *)$ искомая подполугруппа симметрической полугруппы, изоморфная $(A, \cdot\ )$.

Следствие 1.
Всякая группа изоморфна подгруппе симметрической группы над подходящим множеством.

Следствие 2.
Любые группы, состоящие из двух элементов, изоморфны.

Следствие 3.
Любые группы, состоящие из трех элементов, изоморфны.

§7. Теорема о порядке подгруппы конечной группы

Опр. Порядком конечной группы называется количество элементов в ней.

Замечание: группу на бесконечном множестве называют группой бесконечного порядка.

Теорема (о порядке подгруппы конечной группы).
Для любой подгруппы H конечной группы G порядок H является делителем порядка G.

Теорема (о порядке подгруппы конечной группы).
Для любой подгруппы H конечной группы G порядок H является делителем порядка G.

Доказательство:

Пусть Пусть $(G, \cdot)$ – конечная группа, H – её подгруппа, $g \in G$ – фиксированный элемент.

Опр. Правым смежным классом группы G по подгруппе H, соответствующим элементу g, называется

$$Hg = \{h \cdot g \mid \forall h \in H\}.$$

Замечания: 1) $g \in Hg$, т.к. $1 \in H$, и $1 \cdot g = g$.

2) $\forall h \in H: \ Hh = H$, т.к. H замкнуто.

Лемма 1.

Пусть $g_1, g_2 \in G$. Если $Hg_1 \cap Hg_2 \neq \varnothing$, то $Hg_1 = Hg_2$.

Доказательство леммы 1:

Пусть $x \in Hg_1 \cap Hg_2$. Тогда $x = h_1 \cdot g_1 = h_2 \cdot g_2$ для $h_1, h_2 \in H$.

$$\Rightarrow \quad g_1 = h_1^{-1} \cdot x = h_1^{-1} \cdot h_2 \cdot g_2.$$

Тогда $\forall h \in H \rightarrow h \cdot g_1 = (h \cdot h_1^{-1} \cdot h_2) \cdot g_2 \in Hg_2$.

$Hg_1 \subseteq Hg_2$ доказано.

$Hg_2 \subseteq Hg_1$ аналогично $\Rightarrow Hg_1 = Hg_2$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим все возможные правые смежные классы для всех $g \in G$. Набор этих классов образует разбиение множества G (по лемме 1 и замечанию 1).
Обозначим G/H фактор-множество группы G по разбиению, связанному с H. Элементами фактор-множества являются классы эквивалентности.

Опр. Число $|G/H|$ называется индексом подгруппы H в группе G.

Лемма 2.

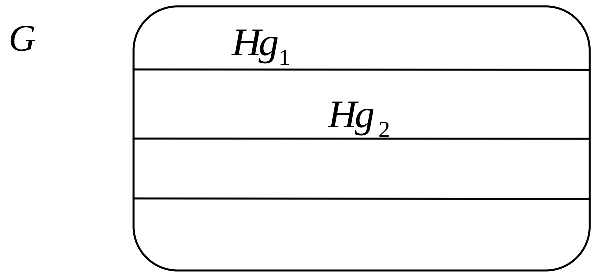
Для любого $g \in G$ выполняется $|H| = |Hg|$.

Доказательство леммы 2:

Рассмотрим отображение $\varphi : H \to Hg$, такое, что $\varphi(h) = h \cdot g$.
Отображение φ всюду определенное, сюръективное, инъективное, т.к. если $h_1 \cdot g = h_2 \cdot g$, то $h_1 = h_1 \cdot g \cdot g^{-1} = h_2 \cdot g \cdot g^{-1} = h_2$.

Отображение φ – биекция. Лемма 2 доказана.

(Продолжение доказательства теоремы)



Из леммы 1 и леммы 2 следует, что $|G| = |H| \cdot |G/H|$.
Следовательно, $|H|$ делит $|G|$.

Теорема доказана.

Опр. Левым смежным классом группы G по подгруппе H, соответствующим элементу g, называется

$$gH = \{g \cdot h \mid \forall h \in H\}.$$

Опр. Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $g \in G$ выполняется $gH = Hg$.

Обозначение: $H \triangleleft G$.