§9. Решетки

Опр. Алгебраической системой называется $(A, \varphi_1, ..., \varphi_k, \rho_1, ..., \rho_m)$, где $\varphi_1, ..., \varphi_k$ – операции на A, $\rho_1, ..., \rho_m$ – отношения на A.

Опр. Универсальной алгеброй (или алгеброй) называется $(A, \varphi_1, ..., \varphi_k)$, где $\varphi_1, ..., \varphi_k$ – операции на A.

Опр. (как алгебраическая система)
Решеткой называется $(A, \wedge, \vee)$, где $\wedge, \vee$ – бинарные операции «пересечения» и «объединения», удовлетворяющие свойствам:

1), 2) коммутативность:

$x \wedge y = y \wedge x$;	$x \vee y = y \vee x$;

3), 4) ассоциативность:

$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;

5), 6) идемпотетность:

$x \wedge x = x$;	$x \vee x = x$;

7), 8) законы поглощения:

$x \wedge (x \vee y) = x$;	$x \vee (x \wedge y) = x$.

Замечание:
Пусть $(A, \wedge, \vee)$ – решетка.
Определим на A отношение $\leq$: $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

Тогда $(A, \leq)$ – ч.у.м..

1) Рефлексивность: $x \leq x$, т.к. $x \wedge x = x$.

2) Антисимметричность: если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x \wedge y = x$ и $y \wedge x = y$.
Тогда $x = y$.

3) Транзитивность: если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \wedge y = x$ и $y \wedge z = y$.

Тогда $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$, т.е $x \leq z$

В случае, когда отношение $\leq$: $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$, получаем то же самое ч.у.м. $(A, \leq)$.

Вопрос: всегда ли ч.у.м. соответствует решетке?

Опр. Инфинумом двух элементов x и y (точной нижней гранью) называется наибольший элемент z: $z \le x$ и $z \le y$.

Обозначение: $\inf(x, y)$.

Опр. Инфинумом двух элементов x и y (точной нижней гранью) называется наибольший элемент z: $z \leq x$ и $z \leq y$.

Обозначение: $\inf(x, y)$.

Опр. Супремумом двух элементов x и y (точной верхней гранью) называется наименьший элемент z: $x \leq z$ и $y \leq z$.

Обозначение: $\sup(x, y)$.

Опр. (как ч.у.м)
Ч.у.м. $(A, \leq)$ называется решеткой, если для любых $x, y \in A$ существует единственный $\inf(x, y)$ и единственный $\sup(x, y)$.

Замечание: Если ч.у.м. $(A, \leq)$ является решеткой, то определив операции $x \wedge y = \inf(x, y)$, $x \vee y = \sup(x, y)$, получим решетку $(A, \wedge, \vee)$ как алгебраическую систему.

Опр. Диаграммой решетки называется диаграмма ч.у.м..

Пример 1. Решетка подгрупп.

Пусть $(A, \oplus)$ – группа вычетов по модулю 6.

Найдем все её подгруппы, используя таблицу Кэли:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$$B_1 = \{0\};$$

$$B_1 = \{0\};$$

$$B_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$B_1 = \{0\};$$

$$B_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$B_3 = \{0, 2, 4\};$$

$$B_4 = \{0, 3\}.$$

$$B_1 = \{0\} = <0>;$$

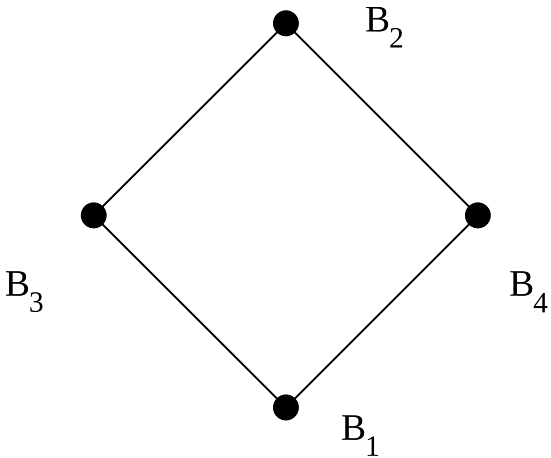
$$B_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = <1>;$$

$$B_3 = \{0, 2, 4\} = <2>;$$

$$B_4 = \{0, 3\} = <3>.$$

Построим диаграмму ч.у.м. $(\{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \subseteq)$:

Построим диаграмму ч.у.м. $(\{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \subseteq)$:



Решетка подгрупп

Пример 2. Решетка разбиений.

Пусть $M = \{1, 2, 3\}$.
Найдем все отношения эквивалентности на M.

$Э_1 = \{K_{11}\}$, где $K_{11} = \{1, 2, 3\}$;

$Э_1 = \{K_{11}\}$, где $K_{11} = \{1, 2, 3\}$;

$Э_2 = \{K_{21}, K_{22}\}$, где $K_{21} = \{1\}$, $K_{22} = \{2, 3\}$;

$$Э_1 = \{K_{11}\}, \text{ где } K_{11} = \{1, 2, 3\};$$

$$Э_2 = \{K_{21}, K_{22}\}, \text{ где } K_{21} = \{1\}, \ K_{22} = \{2, 3\};$$

$$Э_3 = \{K_{31}, K_{32}\}, \text{ где } K_{31} = \{2\}, \ K_{32} = \{1, 3\};$$

$$Э_4 = \{K_{41}, K_{42}\}, \text{ где } K_{41} = \{3\}, \ K_{42} = \{1, 2\};$$

$Э_1 = \{K_{11}\}$, где $K_{11} = \{1, 2, 3\}$;

$Э_2 = \{K_{21}, K_{22}\}$, где $K_{21} = \{1\}$, $K_{22} = \{2, 3\}$;

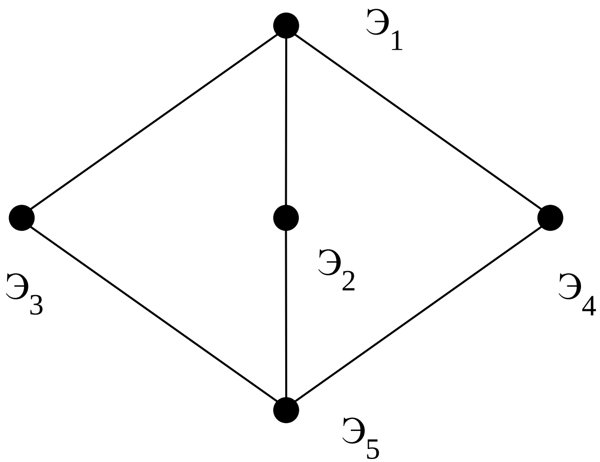
$Э_3 = \{K_{31}, K_{32}\}$, где $K_{31} = \{2\}$, $K_{32} = \{1, 3\}$;

$Э_4 = \{K_{41}, K_{42}\}$, где $K_{41} = \{3\}$, $K_{42} = \{1, 2\}$;

$Э_5 = \{K_{51}, K_{52}, K_{53}\}$, где $K_{51} = \{1\}$, $K_{52} = \{2\}$, $K_{53} = \{3\}$.

Построим диаграмму ч.у.м. $(\{Э_1, Э_2, Э_3, Э_4, Э_5\}, \subseteq)$.

$Э_i \subseteq Э_j$, если каждый класс из разбиения $Э_i$ содержится целиком в каком-нибудь классе $Э_j$.

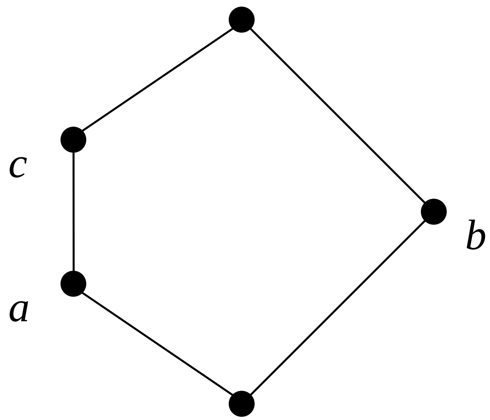


Решетка разбиений

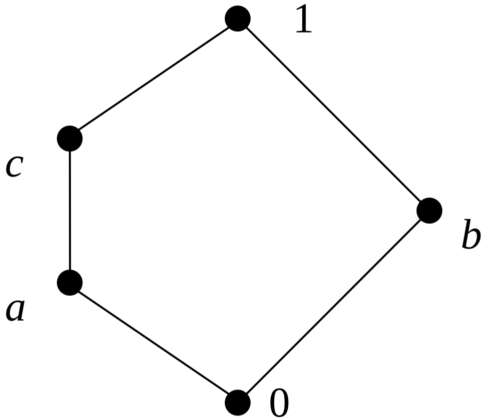
§10. Модулярные, дистрибутивные решетки. Булевы алгебры

Опр. Решетка $(A, \wedge, \vee)$ называется модулярной, если для $a \leq c$ выполняется $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$.

Пример немодулярной решетки:

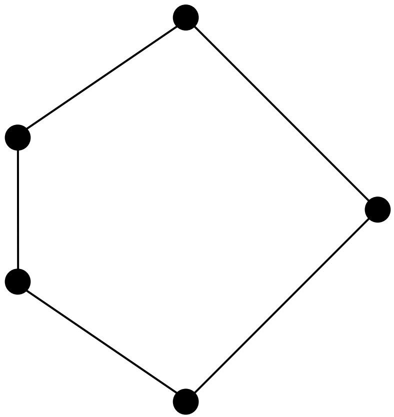


Найдем значение $(a \vee b) \wedge c =$



$$(a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c\ ;$$

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a\ ;\ \text{но}\ c \neq a.$$



Пентагон.

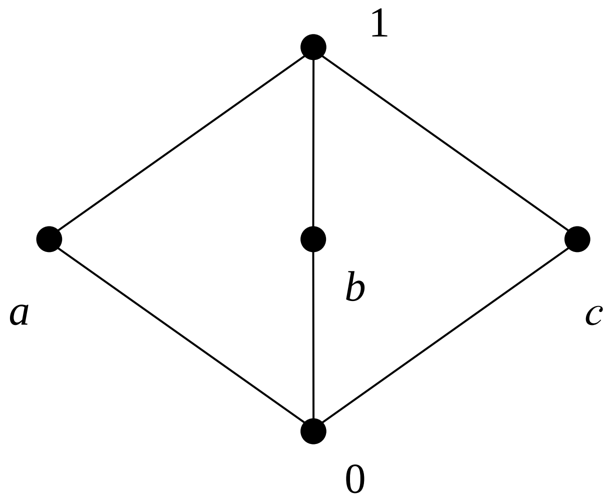
Опр. Пусть $(A, \wedge, \vee)$ – решетка. Подрешеткой называется $B \subseteq A$, замкнутое относительно $\wedge$ и $\vee$ (т.е. $(B, \wedge, \vee)$ – тоже решетка).

Теорема (критерий модулярности, без доказательства).
Решетка модулярная $\Leftrightarrow$ она не содержит подрешеток вида «пентагон».

Опр. Решетка $(A, \wedge, \vee)$ называется дистрибутивной, если выполняются $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ и $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

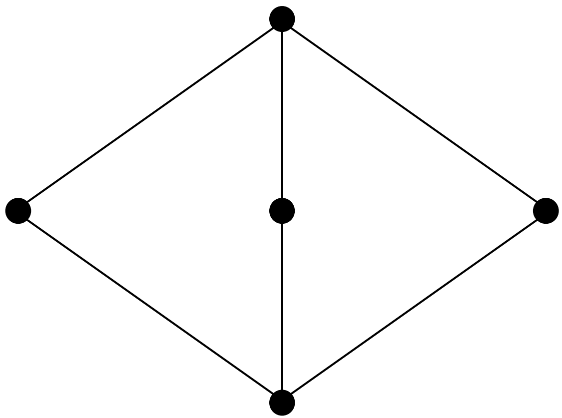
Замечание: если решетка дистрибутивная, то она модулярная, обратное не верно.

Пример модулярной решетки, не являющейся дистрибутивной:



$(a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c$;

$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$; но $c \neq 0$.



Диамант

Теорема (критерий дистрибутивности, без доказательства). Решетка дистрибутивная $\Leftrightarrow$ она не содержит подрешеток вида «пентагон» и «диамант».

Опр. Решетка $(A_1, \wedge_1, \vee_1)$ изоморфна решетке $(A_2, \wedge_2, \vee_2)$, если существует биекция $\delta: A_1 \to A_2$, сохраняющая обе операции, т.е. $\delta(a \wedge_1 b) = \delta(a) \wedge_2 \delta(b)$ и $\delta(a \vee_1 b) = \delta(a) \vee_2 \delta(b)$.

Теорема (без доказательства).
Всякая дистрибутивная решетка изоморфна решетке подмножеств (не обязательно всех) некоторого множества.

Опр. Булевой алгеброй называется (A, $\wedge$, $\vee$, $\overline{}$, 0, 1), где | A | $\geq$ 2, $\wedge$, $\vee$ – бинарные операции, $\overline{}$ – унарная операция «дополнения» (или «отрицания»), 0, 1 – нуль-арные операции, для которых выполняются:

1) (A, $\wedge$, $\vee$) – дистрибутивная решетка;

2) законы де Моргана

$\overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$; $\qquad$ $\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \wedge \overline{y}$;

3) $\overline{\overline{x}} = x$;

4) $x \wedge \overline{x} = 0$; $x \vee \overline{x} = 1$.

Теорема (без доказательства).
$(2^A, \cap, \cup, \overline{}, \varnothing, A)$ является булевой алгеброй.