§8. Мощность множеств, кардинальные числа

Опр. Множества A и B называются равномощными, если существует биекция δ из A в B.

Обозначение: $|A| = |B|$.

Теорема.
Бинарное отношение равномощности на ~~множестве всех множеств~~ Булеане некоторого универсального множества является отношением эквивалентности.

Доказательство:

1) рефлексивность: $|A| = |A|$, т.к. существует тождественное отображение, являющееся биекцией из A в A.

2) симметричность: если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$, т.к. обратное отображение к биекции существует, и является тоже биекцией.

3) транзитивность: если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$, т.к. существует суперпозиция биекций, которая сама является биекцией.

Опр. Мощность множества A – класс эквивалентности всех множеств, равномощных A (или указатель на класс).

Опр. Кардинальным числом множества A (кардиналом) называется некоторый символ, приписанный классу эквивалентности («имя этого класса»).

Обозначение: $|A|$, Card(A).

Опр. Множество называется конечным, если оно пустое или существует $k \in \boldsymbol{N} : |A| = |\{1, 2, \ldots, k\}|$.

$|\varnothing| = 0$; $|A| = k$.

Множество называется бесконечным – в противном случае.

Теорема (критерий Дедекинда бесконечности множества).
Множество A бесконечно $\Leftrightarrow$ A равномощно некоторому собственному подмножеству $B \subset A$.

Пример.
$| \boldsymbol{N} | = | \{2 \cdot n\} |$.

Опр. Множество A называется счетным, если $|A| = |\boldsymbol{N}|$.

Обозначение: $|\boldsymbol{N}| = \aleph_0$ (алеф-ноль).

Теорема 1.

(1) Любое бесконечное подмножество счетного множества – счетно.

(2) Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Теорема 2.

(1) Если A и B счетны, то $A \cup B$ – счетно.

(2) Если A и B счетны, то $A \times B$ – счетно.

Теорема 3 (о мощности числовых множеств).

(1) $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{N} \cup \{0\}|$;

(2) $|\boldsymbol{N} \cup \{0\}| = |\boldsymbol{Z}|$;

(3) $|\boldsymbol{Z}| = |\boldsymbol{Q}|$;

(4) $|\boldsymbol{R}| = |(0,1)|$;

(5) $|(0,1)| \neq |\boldsymbol{N}|$.

Обозначение: $|\boldsymbol{R}| = \mathfrak{C}$ (континуум).

§9. Сравнение мощностей множеств

Опр. Мощность множества A не больше мощности множества B, если существует всюду определенная инъекция φ из A в B.

Обозначение: $|A| \leq |B|$.

Опр. Мощность множества A меньше мощности множества B, если $|A| \le |B|$ и $|A| \ne |B|$.

Обозначение: $|A| < |B|$.

Пример: $|\,\boldsymbol{N}\,| < |\,\boldsymbol{R}\,|$.

Теорема (Кантора).
Для любого множества *A* его мощность меньше мощности булеана 2^A.

Доказательство:
1) $|A| \leq |2^A|$, т.к. сущ. $\varphi: A \to 2^A$, $\varphi(a) = \{a\}$ – всюду определенная инъекция.
2) $|A| \neq |2^A|$. (От противного) Предположим сущ. биекция $\delta: A \to 2^A$. $\delta(a) = A_i \subseteq A$.
Построим $B = \{a \mid \forall a \notin \delta(a)\}$.
Т.к. $B \subseteq A$, существует прообраз *b*: $\delta(b) = B$.
Если $b \in B$, то $b \notin B$.
Если $b \notin B$, то $b \in B$. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема (Кантора-Бернштейна).
Если $|A| \le |B|$ и $|B| \le |A|$, то $|A| = |B|$.

Док-во: теорема сводится к альтернативной формулировке теоремы Кантора-Бернштейна.
Пусть f: $A \to B$ всюду определенная инъекция, не являющаяся сюръекцией. $B_1 = f(A) \subset B$.
Пусть g: $B \to A$ всюду определенная инъекция, не являющаяся сюръекцией. $A_1 = g(B) \subset A$. $|A_1| = |B|$.
$A_2 = g(B_1) \subset A_1$. $|A_2| = |B_1|$.
Тогда $f * g : A \to B_1 \to A_2$ – биекция. $|A| = |A_2|$.

Надо доказать, что если $A_2 \subset A_1 \subset A$ и $|A| = |A_2|$, то $|A| = |A_1|$.

Обозначим $A_0 = A$, $h = f * g : A_0 \to A_2$.

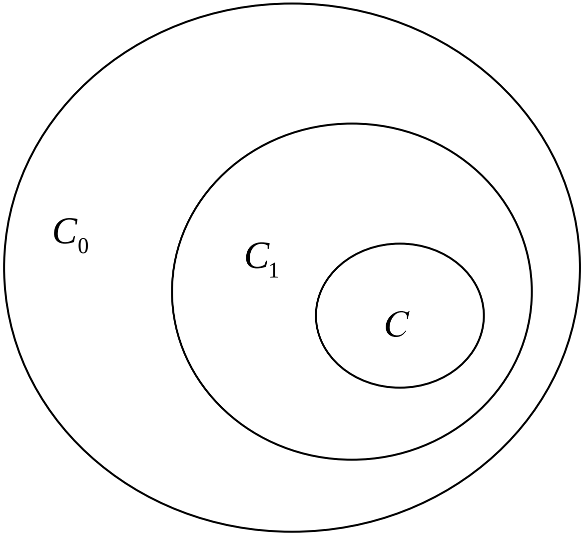
$A_2 = h(A_0),\ A_3 = h(A_1),\ A_4 = h(A_2),\ A_5 = h(A_3),\ A_6 = h(A_4)\ldots$

$\ldots A_4 \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1 \subset A_0$.

$A_{2n} = h^n(A_0),\ A_{2n+1} = h^n(A_1)$.

Рассмотрим $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$ и $C = \bigcap_k A_k$.

Множества не пересекаются, их объединение равно А.


C_0
C_1
C

Слои C_{2n} равномощны. Построим отображение:

$$C_0 \xrightarrow{h} C_2, C_1 \xrightarrow{e} C_1, C_2 \xrightarrow{h} C_4, C_3 \xrightarrow{e} C_3, \ldots, C \xrightarrow{e} C \quad .$$

Это биекция из A_0 в A_1. Следовательно, $|A| = |A_1|$.

Теорема доказана.

Следствие.
Бинарное отношение $\leq$ на наборе мощностей является отношением линейного порядка.

Доказательство:
1) рефлексивность: $|A| \leq |A|$;
2) антисимметричность: по теореме Кантора-Бернштейна;
3) транзитивность: если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, то $|A| \leq |C|$;
4) линейность: для любых A и B выполняется $|A| \leq |B|$ или $|B| \leq |A|$ – верно при справедливости аксиомы выбора.

Вывод для мощностей бесконечных множеств:
$\aleph_0$ – наименьшая; наибольшей не существует;
$\aleph_0 < \aleph_1 < \ldots < \aleph_n < \ldots$

$\aleph_0 < \quad \mathfrak{c}$

Теорема (о континуальных множествах).
(1) Если A и B континуальны, то $A \cup B$ – континуально.
(2) Если A и B континуальны, то $A \times B$ – континуально.
(3) 2^N – континуально.
(4) Множество всех отображений из **N** в **R**: R^N – континуально.

$\aleph_0 < \mathfrak{c}$

Континуум-проблема: существует ли мощность $\aleph_\alpha$:
$\aleph_0 < \aleph_\alpha < \mathfrak{c}$

«Континуум-гипотеза» (Георг Кантор, 1877): не существует мощность $\aleph_\alpha$:

$$\aleph_0 < \aleph_\alpha < \quad \mathfrak{c}$$

В системе аксиом Цермело-Френкеля с аксиомой выбора не доказуемо отрицание гипотезы, не доказуема сама гипотеза (в предположении о непротиворечивости этой системы аксиом).

$\boxed{\text{Неразрешимая проблема}}$

1. (К.Гёдель, 1939) Если система аксиом Цермело-Френкеля непротиворечива, то она остаётся непротиворечивой и после добавления континуум-гипотезы.

2. (П.Коэн, 1963) Если система аксиом Цермело-Френкеля непротиворечива, то она остаётся непротиворечивой и после добавления отрицания континуум-гипотезы.