§6. Числа Стирлинга 1-го рода.

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m) \cdot F_m(x)$$, где $F_m(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

Если нужно наоборот: выразить $F_n(x)$ как многочлен от *x*.

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \tilde{s}(n,m) \cdot x^m$$

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \tilde{s}(n,m) \cdot x^m \quad .$$

Пример.

$n = 2$. $F_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$.

Т.е. $\tilde{s}(2,0) = 0,\ \tilde{s}(2,1) = -1,\ \tilde{s}(2,2) = 1$.

$n = 3$. $F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$\tilde{s}(3,0) = 0,\ \tilde{s}(3,1) = 2,\ \tilde{s}(3,2) = -3,\ \tilde{s}(3,3) = 1$

Опр. Числами Стирлинга 1-го рода называют коэффициенты $s(n,m)$ в разложении $F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} s(n,m) \cdot x^m$.

Частные случаи чисел Стирлинга 1-го рода:

$s(n, n) = 1$, если $n > 0$.

$s(n, 0) = 0$, если $n > 0$.

$s(0, 0) = 1$.

$s(n, 1) = (n - 1)!$.

Теорема (Рекуррентное соотношение для s(n, m)).
Если $1 \le m \le n-1$, то
s(n, m) = s(n –1, m –1) + (n –1)·s(n –1, m).

Доказательство:

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) \cdot (x-n+1) =$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-1-m} s(n-1,m) \cdot x^m \right)(x-n+1) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-1-m} s(n-1,m) \cdot x^{m+1} + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m} (n-1) s(n-1,m) \cdot x^m =$$

$$= (-1)^0 s(n-1,n-1) \cdot x^n + (-1)^n (n-1) s(n-1,0) \cdot x^0 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} ((-1)^{n-m} s(n-1,m-1) + (-1)^{n-m} (n-1) s(n-1,m)) \cdot x^m =$$

так как $s(n-1, n-1) = 1 = s(n, n)$; $(n-1)s(n-1, 0) = 0 = s(n-1, 0)$

$$= (-1)^0 s(n,n)\cdot x^n + (-1)^n s(n,0)\cdot x^0 +$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{n-m}\underbrace{(s(n-1,m-1)+(n-1)s(n-1,m))}_{=s(n,m)}\cdot x^m \, .$$

Теорема доказана.

Опр. Разбиением Ω на циклы называется множество классов, в каждом содержится упорядоченный набор элементов, «с точностью до циклического сдвига», классы не имеют общих элементов, а их объединение равно Ω.

Пример. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

Укажем несколько разбиений на два цикла:

$R_1 = \{(1, 2, 3), (4)\} = \{(2, 3, 1), (4)\} \neq$

$R_2 = \{(2, 1, 3), (4)\}$,

$R_3 = \{(2, 3, 4), (1)\}$,

$R_3 = \{(2, 3), (1, 4)\}$.

Вопрос: сколько разных разбиений Ω на два цикла = ?

Опр.2. Числами Стирлинга 1-го рода $s(n,m)$ называют количество всех различных разбиений Ω ($n=|\Omega|$) на m циклов.

Теорема (без доказательства). Определения 1 и 2 соответствуют одинаковым числам.

Частные случаи чисел Стирлинга 1-го рода:

$s(n, 0) = 0$, если $n > 0$.

$s(n, n) = 1$, если $n > 0$.

$s(0, 0) = 1$.

$s(n, 1) = (n - 1)!$.

Теорема (Рекуррентное соотношение для s(n, m)).
Если $1 \le m \le n-1$, то
s(n, m) = s(n –1, m –1) + (n – 1)·s(n –1, m).

Доказательство:
Пусть $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Рассмотрим размещение a_n в циклы, относительно размещения остальных $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$.

1 случай) a_n образует цикл длины 1, где не будет других элементов.
Остальные элементы $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ разбиваем на (m – 1) циклов.
Количество различных способов равно s(n –1, m –1).

2 случай) a_n добавим в цикл, где размещается еще какой-нибудь элемент.

s(n –1, m) – количество способов разбить элементы $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ на m циклов.

a_n добавим в подходящий цикл, либо после a_1, либо после a_2, и т.д.

Всего (n –1) разных вариантов.

Количество всех способов равно (n –1)·s(n –1, m).

Теорема доказана.

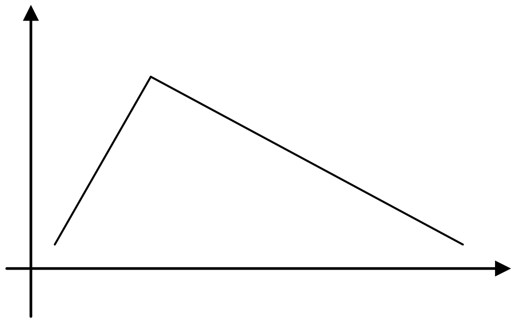
Свойства s(n, m) :

1. Аналог треугольника Паскаля

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
5	0	24	50	35	10	1

2. При фиксированном $n \geq 3$ переменном m последовательность s(n, m) унимодальная, т.е. существует k, такая, что

$$s(n,0) < s(n,1) < \ldots < s(n,k) > s(n,k+1) > \ldots > s(n,n).$$



3. $\sum_{m=0}^{n} s(n,m) = n!$.

Доказательство:

$$\sum_{m=0}^{n} s(n,m) = \left|F_n(-1)\right| = \left|(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)\right|.$$

4. Связь s(n,m) с перестановками, имеющими циклы.

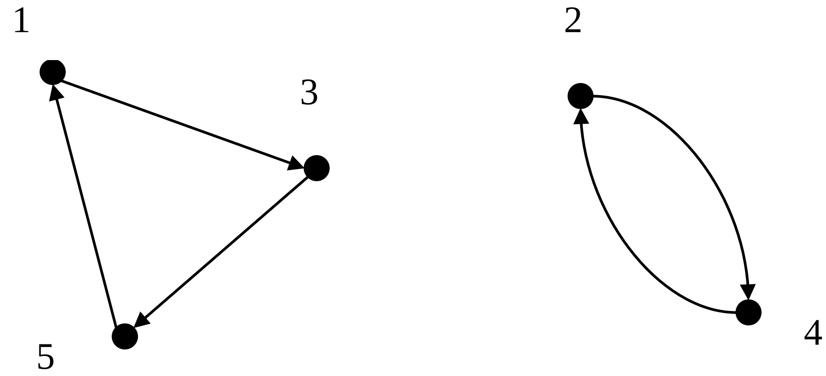
Пример. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Рассмотрим перестановку (3, 4, 5, 2, 1).

Запишем ее в виде подстановки:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. таблицы значений биекции δ, где первая строка – аргументы δ, вторая строка – значения δ.

Проиллюстрируем подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ориентированным графом, где каждое ориентированное ребро идет от аргумента i к значению $\delta(i)$.



Граф распадается на две части, каждая часть является циклом. Поэтому говорим, что перестановка имеет два цикла.
Цикл (1, 3, 5) ~ (3, 5, 1) ~ (5, 1, 3).
Второй цикл (2, 4) ~ (4, 2).

Теорема. Количество перестановок множества $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$, имеющих m циклов, равно $s(n,m)$.