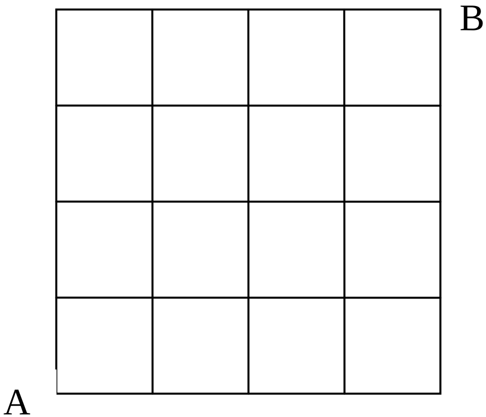
§7. Пути в квадратной решетке. Числа Каталана.

Пусть квадрат, разрезанный на n частей одинаковой длины по горизонтали и n частей по вертикали – схема улиц города.

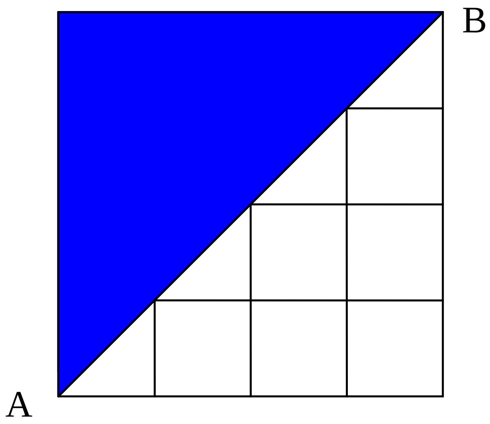


Задача 1: Сколько различных кратчайших маршрутов из A в B?

Решение: Любой кратчайший маршрут из А в В проходит в сумме n кварталов по горизонтали (ось Оx) и n кварталов по вертикали (ось Оy).
Закодируем каждый маршрут словом длины $2n$, из букв x и y, по n раз каждая.

$\Rightarrow$ Количество всех маршрутов равно C_{2n}^{n}.

Задача 2: Сколько различных кратчайших маршрутов из А в В, в нижнем треугольнике («поддиагональные маршруты»)?



Каждый поддиагональный маршрут соответствует слову длины $2n$, из букв x и y, по n раз каждая, в котором для любого начального подслова количество букв $x \geq$ количества y.

Опр. Числами Каталана $\mathrm{T}(n)$ называется количество всех поддиагональных маршрутов в квадрате $n \times n$.

Частные случаи чисел Каталана:

T(0) = 1.

T(1) = 1.

Теорема (Рекуррентное соотношение для T(n)).

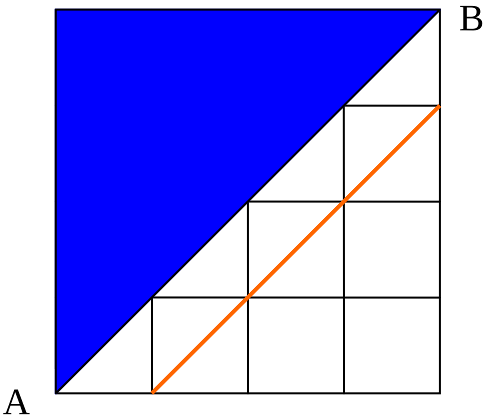
$$\mathrm{T}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{T}(i) \cdot \mathrm{T}(n-1-i)$$, для $n \geq 1$.

Доказательство:

$$\mathrm{T}(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{T}(i)\cdot\mathrm{T}(n-1-i)$$, для $n \geq 1$.

---

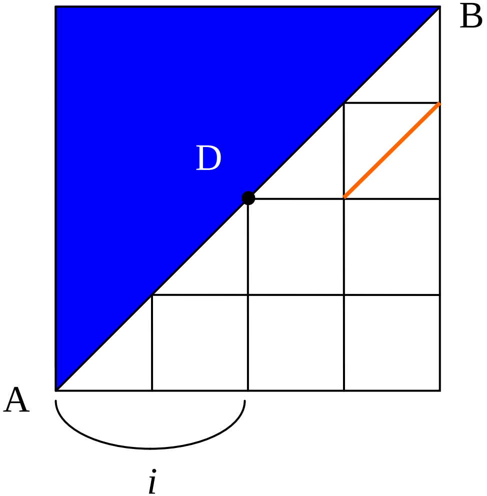
1 случай) Поддиагональный маршрут из A в B нигде не попадает на диагональ:



Тогда маршрут проходит в треугольнике размером $(n-1) \times (n-1)$.

Количество всех таких маршрутов равно $\mathrm{T}(n-1)$.

2 случай) Поддиагональный маршрут из A в B хотя бы раз попадает на диагональ. Пусть точка D, ближайшая к B точка маршрута на диагонали:



Количество всех маршрутов из A в D равно T(i).

Количество всех маршрутов из D в B, не попадающих на диагональ, равно T($n - i - 1$).

Размер i может быть любым от 1 до ($n - 1$).

Всего маршрутов $\mathrm{T}(n-1)+\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{T}(i)\cdot\mathrm{T}(n-1-i)=$

$=\mathrm{T}(0)\cdot\mathrm{T}(n-1)+\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{T}(i)\cdot\mathrm{T}(n-1-i)$. Теорема доказана.

Теорема (Явные формулы для $\mathrm{T}(n)$).

(1) $\mathrm{T}(n) = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$, для $n \geq 1$.

(2) $\mathrm{T}(n) = \dfrac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$, для $n \geq 0$.

(3) $\mathrm{T}(n) = \dfrac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{n}$, для $n \geq 0$.

Доказательство (1):
$\mathrm{T}(n) =$ кол-во всех маршрутов минус кол-во всех «неправильных» маршрутов $= C_{2n}^{n} - ?$

Каждый маршрут закодирован словом w длины $2n$, из букв x и y, по n раз каждая.

Для каждого «неправильного» маршрута по слову $w = a_1 \ldots a_{2n}$ построим слово $\widetilde{w}$:

- Найдем букву, где первый раз кол-во y стало больше, чем x. Пусть кол-во y до этой буквы равно ℓ. Тогда кол-во x до этой буквы тоже равно ℓ. $w = a_1 \ldots a_{2\ell} y \ldots a_{2n}$.

- Заменим каждую букву a_i после $a_{2\ell+1} = y$ на двойственную букву $\overline{a}_i$, где $\overline{x} = y$, $\overline{y} = x$.

$\widetilde{w} = a_1 \ldots a_{2\ell} y \overline{a}_{2\ell+2} \ldots \overline{a}_{2n}$.

- В слове $\widetilde{w}$ количество букв y равно $\ell + 1 + n - \ell = n + 1$;

количество букв x равно $\ell + n - \ell - 1 = n - 1$.

- Кол-во всех «неправильных» маршрутов равно кол-ву всех слов $\widetilde{w}$ длины $2n$, содержащих $(n - 1)$ букву x, остальные y.

C_{2n}^{n-1}

$\mathrm{T}(n) =$ кол-во всех маршрутов минус кол-во всех «неправильных маршрутов» $= C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$.

Доказательство (2):

$$\mathrm{T}(n) = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1-n)}{n!(n+1)!} =$$

$\mathrm{T}(n) =$ кол-во всех маршрутов минус кол-во всех «неправильных маршрутов» $= C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$.

Доказательство (2):

$$\mathrm{T}(n) = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1-n)}{n!(n+1)!} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)} C_{2n}^{n}.$$

При $n = 0$: $\frac{1}{(0+1)} C_{2\cdot 0}^{0} = 1 = \mathrm{T}(0)$.

Доказательство (3):

$$\mathrm{T}(n)=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{(2n)!\,(2n+1)}{n!(n+1)!\,(2n+1)}=\frac{1}{(2n+1)}C_{2n+1}^{n}.$$

При $n = 0$: $\frac{1}{(2\cdot 0+1)}C_{2\cdot 0+1}^{0}=1=\mathrm{T}(0)$.

Задачи, сводимые к числам Каталана:

1. Количество «правильных» последовательностей, составленных из открывающих и закрывающих скобок.

2. Количество способов провести непересекающиеся диагонали в выпуклом $(n + 2)$ -угольнике, так, чтобы получилось n треугольников.