§8. Принцип включения-исключения. Задача о количестве перемещений (беспорядков). Функция Эйлера.

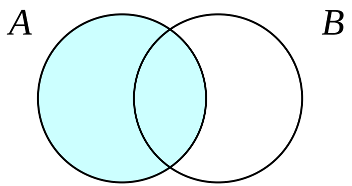
Теорема 1.

$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right| .$$

Доказательство:

Проведём подсчет элементов объединения множеств, сначала сосчитав элементы множества A:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ (при этом $n = |A|$).



Продолжая с номера n, сосчитаем элементы множества B:

$a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+m}$ (при этом $m = |B|$).

Всего подсчитано $n + m$ элементов, но некоторые подсчитаны дважды, а именно элементы из пересечения множеств.

Теорема доказана.

Теорема 2.

$$\left|A\cup B\cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A\cap B\right| - \left|A\cap C\right| - \left|B\cap C\right| + \left|A\cap B\cap C\right|.$$

Доказательство:

$$\left|(A\cup B)\cup C\right| = \left|A\cup B\right| + \left|C\right| - \left|(A\cup B)\cap C\right| =$$

Теорема 2.

$$\left|A\cup B\cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A\cap B\right| - \left|A\cap C\right| - \left|B\cap C\right| + \left|A\cap B\cap C\right|.$$

Доказательство:

$$\left|(A\cup B)\cup C\right| = \left|A\cup B\right| + \left|C\right| - \left|(A\cup B)\cap C\right| =$$

$$= \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A\cap B\right| + \left|C\right| - \left|(A\cap C)\cup(B\cap C)\right| =$$

Теорема 2.

$$\left|A\cup B\cup C\right|=\left|A\right|+\left|B\right|+\left|C\right|-\left|A\cap B\right|-\left|A\cap C\right|-\left|B\cap C\right|+\left|A\cap B\cap C\right|.$$

Доказательство:

$$\left|(A\cup B)\cup C\right|=\left|A\cup B\right|+\left|C\right|-\left|(A\cup B)\cap C\right|=$$

$$=\left|A\right|+\left|B\right|-\left|A\cap B\right|+\left|C\right|-\left|(A\cap C)\cup(B\cap C)\right|=$$

$$=\left|A\right|+\left|B\right|-\left|A\cap B\right|+\left|C\right|-\left(\left|A\cap C\right|+\left|B\cap C\right|-\left|A\cap C\cap B\cap C\right|\right)=$$

$$=\left|A\right|+\left|B\right|+\left|C\right|-\left|A\cap B\right|-\left|A\cap C\right|-\left|B\cap C\right|+\left|A\cap B\cap C\right|.$$

Теорема доказана.

Теорема 3 (Принцип включения-исключения).

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i<j<k}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots +$$

$$+(-1)^{t-1}\sum_{i1<\ldots<it}\left|A_{i1} \cap \ldots \cap A_{it}\right| + \ldots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap \ldots \cap A_n\right|.$$

Доказательство: индукция по $n \ge 2$.

Б.И. Для $n = 2$: теорема 1.

Доказательство: индукция по $n \geq 2$.

Ш.И. Пусть теорема верна для $n \geq 2$.

Тогда для $(n + 1)$ рассмотрим $\left|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}\right| =$

$$= \left|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}\right| = \left|(A_1 \cup \ldots \cup A_n)\right| + \left|A_{n+1}\right| - \left|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}\right| =$$

$$= \left|(A_1 \cup \ldots \cup A_n)\right| + \left|A_{n+1}\right| - \left|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})\right| =$$

$$=\left|(A_1\cup\ldots\cup A_n)\right|+\left|A_{n+1}\right|-\left|(A_1\cap A_{n+1})\cup\ldots\cup(A_n\cap A_{n+1})\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|+\ldots+(-1)^{t-1}\sum_{i1<\ldots<it\le n}\left|A_{i1}\cap\ldots\cap A_{it}\right|+\ldots+(-1)^{n-1}\left|A_1\cap\ldots\cap A_n\right|+$$

$$+\left|A_{n+1}\right|-\left|(A_1\cap A_{n+1})\cup\ldots\cup(A_n\cap A_{n+1})\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}\left|A_i\right|+\ldots+(-1)^{t-1}\sum_{i1<\ldots<it\le n}\left|A_{i1}\cap\ldots\cap A_{it}\right|+\ldots+(-1)^{n-1}\left|A_1\cap\ldots\cap A_n\right|-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\cap A_{n+1}\right|+\sum_{i<j}\left|A_i\cap A_j\cap A_{n+1}\right|-\ldots+(-1)(-1)^{n-1}\left|A_i\cap\ldots\cap A_{n+1}\right|=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \ldots + (-1)^{t-1} \sum_{i1<\ldots<it\leq n+1} |A_{i1} \cap \ldots \cap A_{it}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}|.$$

Теорема доказана.

Следствие.

$$\left|\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = |I| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| + \ldots +$$

$$+ (-1)^t \sum_{i1 < \ldots < it} \left|A_{i1} \cap \ldots \cap A_{it}\right| + \ldots .$$

Задача о количестве перемещений (беспорядков).

Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждая перестановка Ω является биекцией f.

Назовем перемещением (беспорядком) из n перестановку f, если для каждого i выполняется $f(i) \neq i$.

Пример. $\{1, 2, 3, 4\}$

Перемещениями являются перестановки: (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3), равные циклическим сдвигам от (1, 2, 3, 4); а также некоторые попарные перестановки: (2, 1, 4, 3), (4, 3, 2, 1).

Задание для тренировки: найти еще 4 перемещения.

Вопрос: сколько всего различных перемещений из n?

Обозначение: D_n.

Теорема.

$$D_n = n!\cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^t\frac{1}{t!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right),$$ и

$$\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^t\frac{1}{t!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)\to e^{-1},$$ при $n\to\infty$.

Доказательство:

Пусть I – множество всех перестановок Ω. $|I| = n!$.

Обозначим: A_1 – множество всех перестановок, оставляющих на месте 1 ($f(1) = 1$).

A_2 – множество всех перестановок, оставляющих на месте 2.

…

A_n – множество всех перестановок, оставляющих на месте n.

Для каждого i выполняется $|A_i| = (n-1)!$

$$D_n = \left|\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right|.$$

Заметим, что $\left|A_i \cap A_j\right| = (n-2)!$, …

$\left|A_{i1} \cap \ldots \cap A_{it}\right| = (n-t)!$.

$$\left|\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n\right| = |I| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| + \ldots +$$

$$+ (-1)^t \sum_{i1 < \ldots < it} \left|A_{i1} \cap \ldots \cap A_{it}\right| + \ldots.$$

$$D_n = n! - n\cdot(n-1)! + C_n^2(n-2)! + ... + (-1)^t C_n^t (n-t)! + ... + (-1)^n C_n^n (n-n)! =$$

$$D_n = n! - n\cdot(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \ldots + (-1)^t C_n^t (n-t)! + \ldots + (-1)^n C_n^n (n-n)! =$$

$$= n! - n! + \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \ldots + (-1)^t \frac{n!}{t!(n-t)!}(n-t)! + \ldots + (-1)^n \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^t \frac{1}{t!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right).$$

Разложение в ряд функции $e^x = ?$

$$e^{x}=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\ldots+\frac{1}{t!}x^{t}+\ldots$$

$$e^{-1}=1+\frac{1}{1!}(-1)+\frac{1}{2!}(-1)^{2}+\frac{1}{3!}(-1)^{3}+\ldots+\frac{1}{t!}(-1)^{t}+\ldots$$

$$e^{-1}\approx 1+\frac{1}{1!}(-1)+\frac{1}{2!}(-1)^{2}+\frac{1}{3!}(-1)^{3}+\ldots+\frac{1}{n!}(-1)^{n}.$$

Погрешность такого приближения равна $\frac{1}{(n+1)!}$,

$\Rightarrow \quad D_n \approx \frac{n!}{e}$ с погрешностью $\frac{1}{(n+1)}$. Теорема доказана.

Опр. Функцией Эйлера называется $\varphi(n)$, равная количеству натуральных чисел x в отрезке $[1; n]$, взаимно простых с n (т.е. НОД(n, x) = 1).

Теорема (без доказательства).

Если $p_1, ..., p_k$ – простые делители числа n, то

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$