

### §3. Конфигурации с повторениями

Пример.

М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Сколько разных слов можно получить, переставляя карточки с буквами?

Всего 10 карточек. Количество перестановок равно  $10!$ .

Однако некоторые буквы повторяются, следовательно, при их перестановке получаются одинаковые слова.

Буква М – 2 раза; буква А – 3 раза; буква Т – 2 раза.

Число способов переставить буквы: М – 2!, А – 3!, Т – 2!.

По принципу перемножения, для каждого слова есть  $2! \cdot 3! \cdot 2!$  перестановок карточек, дающих это слово.

В результате, количество различных слов равно  $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$ .

Опр. Перестановкой с повторениями называется перестановка элементов совокупности, где некоторые элементы повторяются.

Обозначим  $P_n(k_1, \dots, k_s)$  количество всех различных перестановок с повторениями, где  $n$  – количество всех элементов в совокупности,  $k_1, \dots, k_s$  – количества повторений соответствующих элементов.

Теорема.

$$P_n(k_1, \dots, k_s) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_s!}.$$

Доказательство аналогично примеру.

Теорема.

Пусть  $k_1 + \dots + k_s = n$ . Тогда

$$P_n(k_1, \dots, k_s) = C(n; k_1, \dots, k_{s-1}) = C(n; k_1, \dots, k_s).$$

Доказательство:

$$P_n(k_1, \dots, k_s) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_s!}.$$

$$\begin{aligned}
C(n; k_1, \dots, k_{S-1}) &= C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{n-(k_1+\dots+k_{S-2})}^{k_{S-1}} = \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! \cdot (n-k_1-k_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k_1-\dots-k_{S-2})!}{k_{S-1}! \cdot (n-k_1-\dots-k_{S-1})!} = \\
&= \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_S!} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(n; k_1, \dots, k_S) &= C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{n-(k_1+\dots+k_{S-2})}^{k_{S-1}} \cdot C_{n-(k_1+\dots+k_{S-1})}^{k_S} = \\
&= C(n; k_1, \dots, k_{S-1}) \cdot C_{k_S}^{k_S} = C(n; k_1, \dots, k_{S-1}) \cdot 1.
\end{aligned}$$

Другая конфигурация – сочетание с повторениями.

Пример.

Оценка на экзамене:

неудовлетворительно	2
удовлетворительно	3
хорошо	4
отлично	5

В сессию нужно сдать пять экзаменов.

Результат сессии – набор оценок, где порядок оценок не важен, а количество повторов – важно (5 5 4 4 4 = 5 4 4 4 5 ≠ 4 4 5 5 5)

Сколько разных результатов сессии может быть?

Закодируем результат сессии последовательностью:

$$\underbrace{1\dots1}_{\text{КОЛ-ВО } 2} \underbrace{01\dots01}_{\text{КОЛ-ВО } 3} \underbrace{101\dots101}_{\text{КОЛ-ВО } 4} \underbrace{1\dots1}_{\text{КОЛ-ВО } 5} .$$

Последовательность содержит пять раз 1 и три раза 0, всего восемь цифр.

Количество всех различных результатов сессии равно количеству способов поставить единицы в последовательности из 8 позиций, т.е.

$$C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56 .$$

Такой же результат получится, если подсчитать количество способов поставить нули в последовательности из 8 позиций, т.е.  $C_8^3$  .

Опр. Сочетанием с повторениями из  $n$  по  $m$  называется система из  $m$  неупорядоченных элементов, каждый элемент может быть любого из  $n$  типов.

Обозначим  $H(n, m)$  число всех сочетаний с повторениями из  $n$  по  $m$ .

Теорема.

$$H(n, m) = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}.$$

Доказательство аналогично примеру.

#### §4. Рекуррентные соотношения. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Примеры.

$$1) P_n = n \cdot P_{n-1};$$

$$2) b_n = q \cdot b_{n-1};$$

$$3) C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m;$$

$$4) \Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}.$$

$\Phi_1 = 1; \Phi_2 = 1$  – последовательность Фиббоначи.

Неформальное определение: рекуррентным соотношением называется выражение функции от каких-то параметров через значения этой же функции от меньших параметров.

В дальнейшем будем рассматривать  $f(n): N \rightarrow R$  или  $f(n): N \cup \{0\} \rightarrow R$ , значения которых записываются в виде последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  или  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Опр. Рекуррентным соотношением по  $n$  называется равенство  $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-p}, n)$ , где  $p$  – порядок рекурсии (глубина рекурсии).

Опр. Решением рекурсии (исключение рекурсии) называется выражение  $a_n = f(n)$ , указывающее явную зависимость от  $n$  значений последовательности.

Примеры.

$$1) P_n = n \cdot P_{n-1} \Rightarrow P_n = n!;$$

$$2) b_n = q \cdot b_{n-1} \Rightarrow b_n = b_0 \cdot q^n;$$

4) Последовательность Фиббоначи:  $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$ .

$$\Phi_n = ?$$

Опр. Линейным неоднородным рекуррентным соотношением порядка  $p$ , с постоянными коэффициентами, называется равенство

$$a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p} + g(n).$$

Опр. Линейным **однородным** рекуррентным соотношением порядка  $p$ , с постоянными коэффициентами, называется равенство

$$a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p}.$$

Опр. Пусть  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$ . Назовем его характеристическим уравнением  $x^2 = k_1 x + k_2$ .

Теорема (о линейных однородных рекуррентных соотношениях, порядка 2, с постоянными коэффициентами).

Если  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$ , то  $a_n = f(n) = C_1 \cdot f_1(n) + C_2 \cdot f_2(n)$ .

(1) Если у характеристического уравнения два различных действительных корня  $q_1 \neq q_2$ , то  $f_1(n) = q_1^n$ ,  $f_2(n) = q_2^n$ .

(2) Если у характеристического уравнения два совпавших действительных корня  $q_1 = q_2$ , то  $f_1(n) = q_1^n$ ,  $f_2(n) = n q_1^n$ .

(3) Если у характеристического уравнения два различных комплексных корня  $q_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$ , то  $f_1(n) = r^n \cos(n\varphi)$ ,  $f_2(n) = r^n \sin(n\varphi)$ .

Значения констант  $C_1, C_2$  определяются в зависимости от двух начальных значений  $a_1, a_2$  (или  $a_0, a_1$ ).

Замечание: Общим решением рекуррентного отношения называют  $a_n = C_1 \cdot f_1(n) + C_2 \cdot f_2(n)$ , где  $C_1, C_2$  – обозначения для всех возможных значений констант.

Доказательство теоремы:

1. Покажем, что в случае существования у характеристического уравнения действительного корня  $q$  выполняется, что  $f(n) = q^n$  удовлетворяет рекуррентному соотношению  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$ .

$$q^n = k_1 q^{n-1} + k_2 q^{n-2} \Leftrightarrow q^2 = k_1 q + k_2 - \text{верно.}$$

Замечание: случай  $q = 0$  равносильно  $k_2 = 0$ , тогда рекуррентное соотношение будет первого порядка.

2. Покажем, что в случае существования у характеристического уравнения совпавших действительных корней  $q_1 = q_2$  выполняется, что  $f(n) = nq_1^n$  также удовлетворяет рекуррентному соотношению  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$ .

$$\begin{aligned} nq_1^n &= k_1(n-1)q_1^{n-1} + k_2(n-2)q_1^{n-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow nq_1^n &= k_1 nq_1^{n-1} - k_1 q_1^{n-1} + k_2 nq_1^{n-2} - 2k_2 q_1^{n-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow nq_1^2 &= k_1 nq_1 - k_1 q_1 + k_2 n - 2k_2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 0 = -k_1 q_1 - 2k_2$  – верно, т.к. корень характеристического уравнения с нулевым дискриминантом равен  $q_1 = \frac{k_1 \pm \sqrt{0}}{2}$ , и условие равенства нулю дискриминанта равносильно  $(-k_1)^2 - 4(-k_2) = 0$ .

2. Покажем, что в случае существования у характеристического уравнения комплексных корней  $q_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$  выполняется, что  $f(n) = r^n \cos(n\varphi)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$ .

$$q_1^n = k_1 q_1^{n-1} + k_2 q_1^{n-2} \Leftrightarrow q_1^2 = k_1 q_1^1 + k_2 - \text{верно.}$$

Подставим в рекуррентное соотношение  $q_1^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

$$r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^{n-1} (\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi) + r^{n-2} (\cos(n-2)\varphi + i \sin(n-2)\varphi).$$

Равенство с комплексными числами верно, только если равны действительные части и мнимые.

$$r^n \cos n\varphi = r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + r^{n-2} \cos(n-2)\varphi \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow r^n \cos(n\varphi)$  удовлетворяет рекуррентному соотношению.

Для  $f(n) = r^n \sin(n\varphi)$  аналогичное доказательство. Теорема доказана.

Опр. Пусть  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p}$ . Назовем его  
характеристическим уравнением  $x^p = k_1 x^{p-1} + k_2 x^{p-2} + \dots + k_{p-1} x + k_p$ .

Теорема (о линейных однородных рекуррентных соотношениях, порядка  $p$ , с постоянными коэффициентами).

Если  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p}$ , то

$$a_n = f(n) = C_1 \cdot f_1(n) + C_2 \cdot f_2(n) + \dots + C_p \cdot f_p(n).$$

(1) Каждому действительному корню  $q$  (характеристического уравнения) кратности 1, соответствует  $f_i(n) = q^n$ ;

(2) Каждому действительному корню  $q$  кратности  $m$ , соответствует  $f_i(n) = q^n, f_{i+1}(n) = n \cdot q^n, \dots, f_{i+m-1}(n) = n^{m-1} q^n$ ;

(3) Каждой паре комплексных корней  $q_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$

кратности 1, соответствует  $f_i(n) = r^n \cos(n\varphi), f_{i+1}(n) = r^n \sin(n\varphi)$ ;

(4) Каждой паре комплексных корней  $q_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)$

кратности  $m$ , соответствует  $f_i(n) = r^n \cos(n\varphi)$ ,

$$f_{i+1}(n) = n \cdot r^n \cos(n\varphi), \dots, f_{i+m-1}(n) = n^{m-1} r^n \cos(n\varphi),$$

$$f_{i+m}(n) = r^n \sin(n\varphi),$$

$$f_{i+m+1}(n) = n \cdot r^n \sin(n\varphi), \dots, f_{i+2m-1}(n) = n^{m-1} r^n \sin(n\varphi);$$

Теорема (о линейных неоднородных рекуррентных соотношениях, порядка  $p$ , с постоянными коэффициентами).

Если  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p} + g(n)$ , то

$a_n = P(n, C_1, C_2, \dots, C_p) + Q(n)$ , где  $P(n, C_1, C_2, \dots, C_p)$  – общее решение однородного соотношения  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p}$ , и  $Q(n)$  – «частное решение» исходного неоднородного соотношения.

Замечание:  $Q(n)$  может быть похожа на  $g(n)$ .

Пример.

$$a_n = 5a_{n-1} + 4, \quad a_1 = 1.$$

Метод исключения неоднородности:

Пусть  $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p} + g(n)$ .

Тогда  $a_{n-1} = k_1 a_{n-2} + k_2 a_{n-3} + \dots + k_p a_{n-p-1} + g(n-1)$ .

1) Если  $g(n) = \text{const}$ , то  $g(n) - g(n-1) \equiv 0$ . Тогда

$a_n - a_{n-1} = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \dots + k_p a_{n-p} - k_1 a_{n-2} - k_2 a_{n-3} - \dots - k_p a_{n-p-1}$  —  
новое рекуррентное соотношение, однородное.

Пример.

$$a_n = 5a_{n-1} + 4, \quad a_1 = 1.$$

2) Если  $g(n)$  – многочлен, то  $g(n) - g(n-1)$  – многочлен меньшей степени. Тогда после вычитания получим неоднородное рекуррентное соотношение, в котором многочлен можно продолжать понижать до константы.