Глава III. Автоматы и языки

§1. Языки и операции с ними

Опр. Алфавит Σ – конечное непустое множество.
Буква – каждый элемент множества Σ.

Слово над алфавитом Σ – конечная последовательность $a_1 \dots a_n$, где каждая $a_k \in \Sigma$.
(цепочка, string)
Длина слова $a_1 \dots a_n$ – количество n символов в слове.
Пустое слово ε – слово длины 0.

Обозначение Σ^* – множество всех слов (включая пустое) над алфавитом Σ.

Опр. (Умножение слов)

Произведением слова $u = a_1 \dots a_n$ на слово $v = b_1 \dots b_m$ называется слово $u \cdot v = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$.

(конкатенация)

Свойства:

1) умножение не коммутативно: $u \cdot v \neq v \cdot u$;

2) умножение ассоциативно: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$;

3) пустое слово ε является нейтральным элементом относительно умножения: $u \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot u = u$.

Следствие: $(\Sigma^*, \cdot)$ – полугруппа с нейтральным элементом (моноид).

Опр. Степенью *k* слова *u* называется $u^k = \underbrace{u \cdot \ldots \cdot u}_{k}$.

Опр. Языком над алфавитом Σ называется $L \subseteq \Sigma^*$.

Пустым языком называется $L = \varnothing$.

Пример.
1) Естественный (русский) язык.

2) Σ ={0, 1}; язык компьютерных программ, записанных на автокоде.

Операции над языками:
пересечение $L_1 \cap L_2$;
объединение $L_1 \cup L_2$;
дополнение $\overline{L}$
(универсальным множеством является Σ^*).

Опр. Произведением языков L_1 и L_2 называется язык $L_1 \cdot L_2 = \{u \cdot v \mid u \in L_1, v \in L_2\}$.

Опр. Степенью k языка L называется $L^k = \underbrace{L \cdot \ldots \cdot L}_{k}$.

Обозначим $L^0 = \{\varepsilon\}$.

Опр. Итерацией языка L называется язык

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots.$$

«Звезда Клини»

Приоритеты операций:

итерация	наивысший
умножение	высокий
дополнение	средний
пересечение, объединение	низший

Свойства операций:

1) $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) = L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3;$

$$(L_2 \cup L_3) \cdot L_1 = L_2 \cdot L_1 \cup L_3 \cdot L_1;$$

Свойства операций:

1) $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) = L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3$;

$(L_2 \cup L_3) \cdot L_1 = L_2 \cdot L_1 \cup L_3 \cdot L_1$.

---

2) $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$;

$(L_2 \cap L_3) \cdot L_1 \subseteq L_2 \cdot L_1 \cap L_3 \cdot L_1$;

3) $(L_1 \cup L_2)^* \supseteq L_1^* \cup L_2^*$;

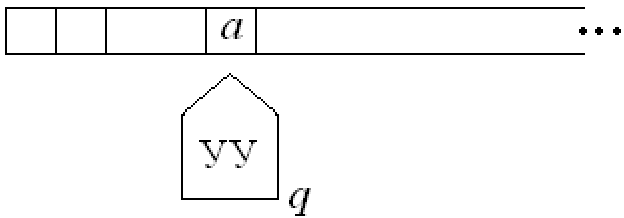
4) $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^* \cap L_2^*$.

§2. Конечный автомат. Язык, допускаемый конечным автоматом

Опр. Конечный автомат (ДКА) – набор (Q, Σ, φ, q_0, Q_F), где
Q – конечное множество (внутренних) состояний автомата;
Σ – конечное множество (входных) символов, «алфавит»;
$q_0 \in Q$ – начальное состояние;
$Q_F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний;
φ – функция переходов (всюду определенная):
$\varphi: Q \times \Sigma \to Q$.

$(Q, \Sigma, \varphi, q_0, Q_F)$

Опр. (как механическое устройство). Конечный автомат состоит из управляющего устройства (УУ), и ленты, разбитой на ячейки.
В каждый момент УУ находится в каком-нибудь состоянии из множества Q, и просматривает ячейку, в которой записан какой-нибудь символ из множества Σ.



Автомат работает тактами.

На каждом такте, находясь в состоянии q и просматривая ячейку с символом a, автомат выполняет следующие действия:
УУ переходит в состояние q', где $\varphi(q, a) = q'$;
УУ сдвигается по ленте вправо.

Автомат начинает работу в состоянии q_0 (начальное состояние), просматривая самую первую слева ячейку.

Способы задания автомата:

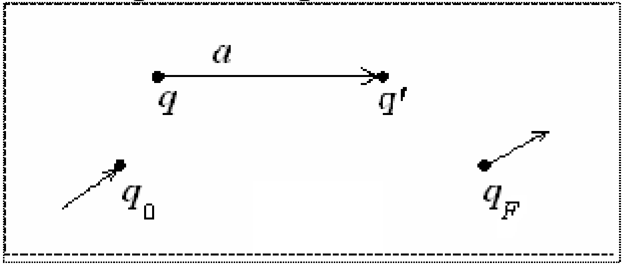
1. Расширенная таблица переходов.

символы алфавита Σ

состояния из Q

		…	a	…	заключ.
q_0					
…					
q			$\varphi(q, a)$		0 или 1

2. Диаграмма переходов.



Пример: «Автомат для продажи кофе».
Пусть стоимость стакана кофе 10 рублей.
Автомат принимает монеты 5 и 10 рублей, Σ = {5, 10}.

$$Q = \{q_0, \quad q_5, \quad q_F\}$$

«ожидание клиента»	«кредит 5 рублей»	«кофе»

Расширенная таблица переходов.

	5	10	заключ.
q_0			
q_5			
q_F			

Пример: «Автомат для продажи кофе».
Пусть стоимость стакана кофе 10 рублей.
Автомат принимает монеты 5 и 10 рублей, Σ = {5, 10}.

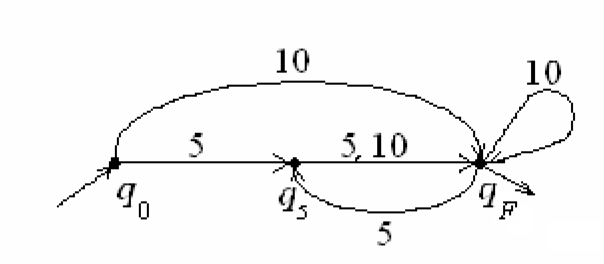
$$Q = \{q_0, \quad q_5, \quad q_F\}$$

q_0	q_5	q_F
«ожидание клиента»	«кредит 5 рублей»	«кофе»

Расширенная таблица переходов.

	5	10	заключ.
q_0	q_5	q_F	0
q_5	q_F	q_F	0
q_F	q_5	q_F	1

Диаграмма переходов:



Опр. Автомат допускает слово $w = a_1 \ldots a_n$, если существует последовательность состояний $q_0, q_1, \ldots, q_n$: $q_n \in Q_F$, $\varphi(q_0, a_1) = q_1$, $\varphi(q_1, a_2) = q_2$, …, $\varphi(q_{n-1}, a_n) = q_n$.

(т.е. просмотрев все буквы слова *w* автомат переходит из начального состояния в заключительное)

Замечание: автомат допускает пустое слово, если $q_0 \in Q_F$.

Опр. Язык, допускаемый автоматом – множество всех слов, допускаемых автоматом.

Пример.
Для автомата, продающего кофе, язык $L = \{5\ 5,\ 10,\ 5\ 10,\ 10\ 10,\ \ldots\}$.