§3. Приведённые конечные автоматы

Опр. Состояние q называется недостижимым, если для любого входного слова автомат никогда не переходит в q (начиная с начального состояния).

Замечание: на диаграмме переходов не существует ориентированных маршрутов (путей) из начального состояния в недостижимое q.

Опр. Два состояния s и t автомата называются эквивалентными, если начиная с состояния s, автомат допускает те же слова, что и начиная с t.

Замечание: аналогично можно определить эквивалентные состояния в разных автоматах.

Опр. Автомат называется приведенным, если он не содержит эквивалентных состояний, и все состояния достижимые.

Опр. Два автомата называются эквивалентными, если они допускают одинаковый язык.

(т.е. их начальные состояния эквивалентны)

Задача: для данного автомата найти приведенный эквивалентный автомат.

Алгоритм нахождения достижимых (недостижимых) вершин:

1. $Q_0 = \{q_0\}$.
2. $Q_1 = \{\varphi(q_0, x) \mid x \in \Sigma\} \cup Q_0$.
3. $Q_2 = \{\varphi(q, x) \mid x \in \Sigma,\, q \in Q_1\} \cup Q_1$.

…

k + 1. $Q_k = \{\varphi(q, x) \mid x \in \Sigma,\, q \in Q_{k-1}\} \cup Q_{k-1}$.

Алгоритм останавливается, когда $Q_k = Q_{k-1}$ (стабилизация).

Результат – множество достижимых вершин $Q_k = Q_{k-1}$.

Алгоритм поиска эквивалентных состояний:

1. Найти разбиение S_1 множества Q из двух классов $\{K_1, K_2\}$, где $K_1 = Q_F$, $K_2 = Q \setminus Q_F$.

k. Найти S_k, разбивая классы разбиения S_{k-1} на подклассы по следующему признаку: если для каждой $x \in \Sigma$ результаты функции перехода $\varphi(s, x)$ и $\varphi(t, x)$ принадлежат одному классу разбиения S_{k-1}, то состояния s и t оставляем в одном классе. В противном случае, состояния s и t оказываются в разных классах.

Алгоритм останавливается, если $S_k = S_{k-1}$.

Результат – разбиение на классы эквивалентных состояний.

Лемма (без доказательства).
Состояния s и t эквивалентны $\Leftrightarrow$ выполнены условия:
(1) «Условие подобия» – s и t либо оба заключительные, либо нет.
(2) «Условие преемственности» – на любом входном символе $\varphi(s, x)$ и $\varphi(t, x)$ эквивалентны.

Теорема.
Для любого конечного автомата существует приведенный эквивалентный конечный автомат.

Теорема.
Для любого конечного автомата существует приведенный эквивалентный конечный автомат.

Доказательство:

Пусть ДКА = (Q, Σ, φ, q_0, Q_F).

1. Применяя алгоритм, найдем множество достижимых состояний Q_k. Удалив недостижимые состояния, будем считать что $Q = Q_k$.

2. Применяя алгоритм, найдем разбиение $S = \{K_1, \ldots, K_m\}$ на классы эквивалентных состояний.

3. Построим автомат (S, Σ, ψ, s_0, S_F), где $S = \{K_1, \ldots, K_m\}$, $q_0 \in s_0 = K_i$, $S_F = \{K \mid K \subseteq Q_F\}$.

$$\psi(K, a) = K' \iff \exists q \in K, \exists q' \in K' : \ \varphi(q, a) = q'.$$

4. Очевидно, что если существует последовательность состояний $q_0, q_1, \ldots, q_n :\ q_n \in Q_F$, $\varphi(q_0, a_1) = q_1$, $\varphi(q_1, a_2) = q_2$, …, $\varphi(q_{n-1}, a_n) = q_n$, то существует последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S :\ s_n \in S_F$, $\psi(s_0, a_1) = s_1$, $\psi(s_1, a_2) = s_2$, …, $\psi(s_{n-1}, a_n) = s_n$. И наоборот.

Автоматы допускают одинаковые слова, т.е. эквивалентны.

§4. Недетерминированные конечные автоматы

Опр. Недетерминированный конечный автомат (НКА) – набор (Q, Σ, δ, Q_0, Q_F), где

Q – конечное множество (внутренних) состояний автомата;

Σ – конечное множество (входных) символов, «алфавит»;

$Q_0 \subseteq Q$ – множество начальных состояний;

$Q_F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний;

δ – функция переходов (всюду определенная):

$\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q$ (т.е. $\delta(q,a) = \{q_1, \ldots\} \subseteq Q$).

Замечание: часто встречается определение НКА, в котором только одно начальное состояние.

Как механическое устройство, НКА переходит в какое-нибудь состояние $q' \in \delta(q, a)$; или останавливается, если $\delta(q, a) = \varnothing$.

Способы задания НКА:

1. Расширенная таблица переходов.

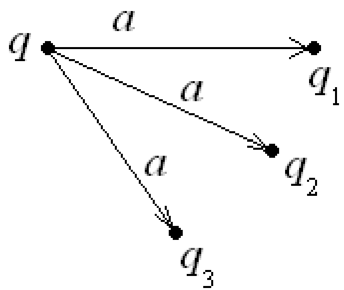
символы алфавита Σ

состояния из Q

нач.			…	a	…	заключ.
$\to$	q_0					
	…					
	q			$q_1, \dots$		0 или 1

Если $\delta(q, a) = \varnothing$, то ячейка пустая.

2. Диаграмма переходов.



Пример: «Игровой автомат».
Пусть стоимость игры 10 рублей.
Автомат принимает монеты 5 и 10 рублей, $\Sigma = \{5, 10\}$.

$$Q = \{q_0, \quad q_1, \quad q_2, \quad q_3\}$$

q_0	q_1	q_2	q_3
«ожидание клиента»	«кредит 5 рублей»	«проигрыш»	«выигрыш»

Расширенная таблица переходов.

нач.		5	10	заключ.
$\rightarrow$	q_0			
	q_1			
	q_2			
	q_3			

Пример: «Игровой автомат».
Пусть стоимость игры 10 рублей.
Автомат принимает монеты 5 и 10 рублей, $\Sigma = \{5, 10\}$.

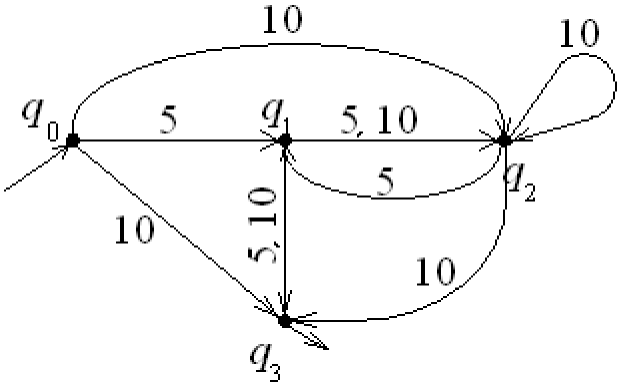
$$Q = \{q_0, \quad q_1, \quad q_2, \quad q_3\}$$

q_0	q_1	q_2	q_3
«ожидание клиента»	«кредит 5 рублей»	«проигрыш»	«выигрыш»

Расширенная таблица переходов.

нач.		5	10	заключ.
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_2, q_3	0
	q_1	q_2, q_3	q_2, q_3	0
	q_2	q_1	q_2, q_3	0
	q_3			1

Диаграмма переходов:



Опр. НКА допускает слово $w = a_1 \dots a_n$, если существует последовательность состояний $q_0, q_1, \dots, q_n$: $q_n \in Q_F$, $\delta(q_0, a_1) \ni q_1$, $\delta(q_1, a_2) \ni q_2$, …, $\delta(q_{n-1}, a_n) \ni q_n$.

(т.е. просмотрев все буквы слова w автомат может перейти из начального состояния в заключительное)

Опр. Язык, допускаемый НКА – множество всех слов, допускаемых НКА.

Теорема (Рабин-Скотт, 1 часть).
Для любого недетерминированного конечного автомата существует детерминированный конечный автомат, допускающий тот же язык.

Теорема (Рабин-Скотт, 1 часть).
Для любого недетерминированного конечного автомата существует детерминированный конечный автомат, допускающий тот же язык.

Доказательство:

Пусть НКА = (Q, Σ, δ, Q_0, Q_F).

Построим ДКА = (P, Σ, φ, p_0, P_F), где $P = 2^Q$, $p_0 = Q_0$,

$P_F = \{p \subseteq Q \mid p \cap Q_F \neq \varnothing\}$.

$$\varphi(p, x) = p' = \bigcup_{q \in p} \delta(q, x).$$

Покажем, что если НКА допускает слово $w = a_1 \ldots a_n$, то построенный ДКА – тоже.

Пусть существует последовательность состояний $q_0, q_1, \ldots, q_n$:

$q_0 \in Q_0$, $q_n \in Q_F$, $\delta(q_0, a_1) \ni q_1$, $\delta(q_1, a_2) \ni q_2$, …, $\delta(q_{n-1}, a_n) \ni q_n$.

Тогда $\varphi(p_0, a_1) = p_1 = \delta(q_0, a_1) \ni q_1$;

$\varphi(p_1, a_2) = p_2 \supseteq \delta(q_1, a_2) \ni q_2$;

$\varphi(p_{n-1}, a_n) = p_n \supseteq \delta(q_{n-1}, a_n) \ni q_n$, и $p_n \in P_F$.

Аналогично доказывается, что если ДКА допускает слово $w = a_1 \ldots a_n$, то исходный НКА – тоже.

Пример построения ДКА, допускающего тот же язык, что игровой автомат.

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

		5	10	заключ.
$\rightarrow$	q_0	q_1	q_2, q_3	0
	q_1	q_2, q_3	q_2, q_3	0
	q_2	q_1	q_2, q_3	0
	q_3			1

Состояниями ДКА можно взять не все подмножества:

$p_0 = \{q_0\}$, $p_1 = \{q_1\}$, $p_2 = \{q_2, q_3\}$.

$P_F = \{p_2\}$.

	5	10	заключ.
p_0	p_1	p_2	0
p_1	p_2	p_2	0
p_2	p_1	p_2	1