§5. Теорема о замкнутости. Регулярные языки. Теорема Клини

Обозначим $\Omega_{\text{авт}}$ класс всех языков над фиксированным алфавитом Σ, допускаемых конечными автоматами.

Проблема – дать характеристику класса $\Omega_{\text{авт}}$, относительно операций над языками.

Теорема.

Класс $\Omega_{\text{авт}}$ замкнут относительно операций пересечения, объединения, дополнения, произведения, итерации.

Теорема.
Класс $\Omega_{\text{авт}}$ замкнут относительно операций пересечения, объединения, дополнения, произведения, итерации.

Доказательство:
Пусть $L(A_1)$ – язык, допускаемый ДКА $A_1 = (Q_1, \Sigma, \varphi_1, q_{01}, Q_{F1})$, $L(A_2)$ – язык, допускаемый ДКА $A_2 = (Q_2, \Sigma, \varphi_2, q_{02}, Q_{F2})$, и $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Очевидно, $L(A_1) \in \Omega_{\text{авт}}$, $L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

1. Покажем, что $L(A_1) \cup L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

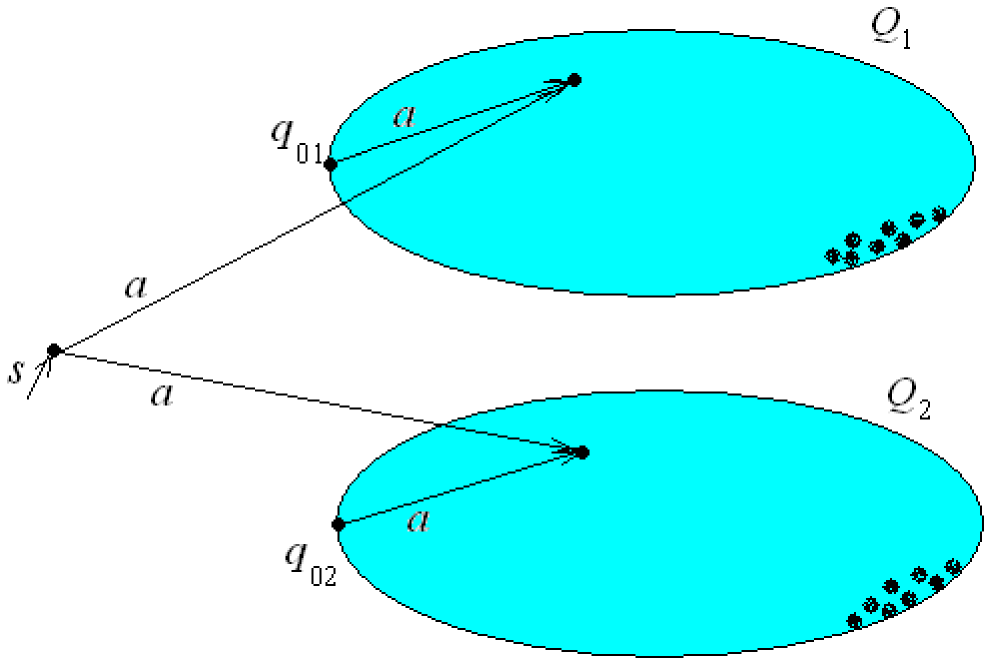
1. Покажем, что $L(A_1) \cup L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

Построим НКА $B = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}, \Sigma, \delta, s, Q_{F3})$, где $s \notin Q_1 \cup Q_2$,

$$Q_{F3} = \begin{cases} Q_{F1} \cup Q_{F2}, & \text{если } \varepsilon \notin L(A_1) \cup L(A_2) \\ \{s\} \cup Q_{F1} \cup Q_{F2}, & \text{если } \varepsilon \in L(A_1) \cup L(A_2) \end{cases}.$$

$\delta(q,x) = \varphi_1(q,x)$ или $\varphi_2(q,x)$, для $q \in Q_1 \cup Q_2$;

$\delta(s,x) = \{\varphi_1(q_{01},x) \cup \varphi_2(q_{02},x)\}$.



Q_1
q_{01}
a
a
s
a
Q_2
a
q_{02}

$$L(B) = L(A_1) \cup L(A_2) .$$

По теореме из §4, существует ДКА, допускающий тот же язык.

2. Покажем, что $\overline{L(A_1)} \in \Omega_{\text{авт}}$.

Построим ДКА $B = (Q_1, \Sigma, \varphi_1, q_{01}, Q_1 \setminus Q_{F1})$.

Рассмотрев любое слово w автомат переходит в какое-нибудь состояние q.
Если $w \in L(A_1)$, т.е. $w \notin L(B)$, то $q \in Q_{F1}$, т.е. не является заключительным в автомате B.
И наоборот, если $w \notin L(A_1)$, т.е. $w \in L(B)$, то $q \notin Q_{F1}$, т.е. является заключительным в автомате B.

Следовательно, $L(B) = \overline{L(A_1)}$.

3. $L(A_1) \cap L(A_2) = \overline{(\overline{L(A_1)} \cup \overline{L(A_2)})}$.

4. Покажем, что $L(A_1) \cdot L(A_2) \in \Omega_{\text{авт}}$.

1 случай) $\varepsilon \notin L(A_1)$, т.е. $q_{01} \notin Q_{F1}$.

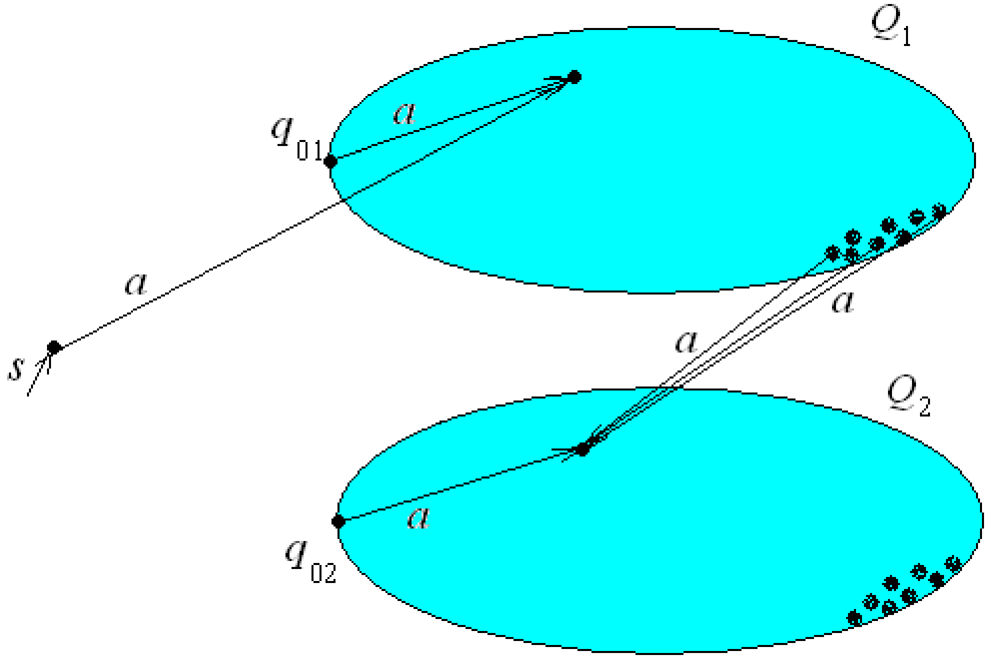
Построим НКА $B = (Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}, \Sigma, \delta, s, Q_{F2})$, где $s \notin Q_1 \cup Q_2$,

$\delta(s, x) = \varphi_1(q_{01}, x)$;

$\delta(q, x) = \varphi_2(q, x)$, для $q \in Q_2$;

$\delta(q, x) = \varphi_1(q, x)$, для $q \in Q_1 \setminus Q_{F1}$;

$\delta(q, x) = \varphi_1(q, x) \cup \varphi_2(q_{02}, x)$, для $q \in Q_{F1}$.



Q_1
a
q_{01}
a
a
a
s
Q_2
a
q_{02}

$$L(B) = L(A_1) \cdot L(A_2).$$

По теореме из §4, существует ДКА, допускающий тот же язык.

2 случай) $\varepsilon \in L(A_1)$, т.е. $q_{01} \in Q_{F1}$.

К автомату *B* из случая 1 добавим

$$\delta(s, x) = \varphi_1(q_{01}, x) \cup \varphi_2(q_{02}, x).$$

$$L(B) = L(A_1) \cdot L(A_2).$$

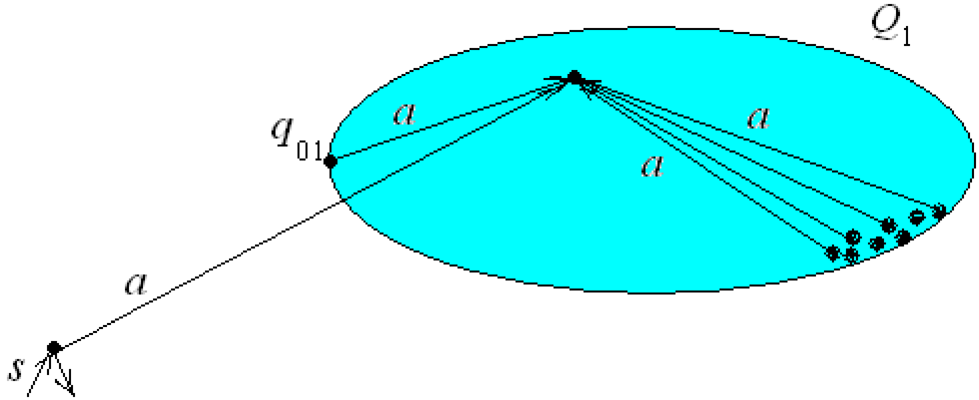
По теореме из §4, существует ДКА, допускающий тот же язык.

5. Покажем, что $\left(L(A_1)\right)^* \in \Omega_{\text{авт}}$.

Построим НКА $B = (Q_1 \cup \{s\}, \Sigma, \delta, s, Q_{F1} \cup \{s\})$, где $s \notin Q_1$,

$\delta(s, x) = \varphi_1(q_{01}, x)$;

$\delta(q, x) = \varphi_1(q, x)$, для $q \in Q_1 \setminus Q_{F1}$;
$\delta(q, x) = \varphi_1(q, x) \cup \varphi_1(q_{01}, x)$, для $q \in Q_{F1}$.



$$L(B) = \left(L(A_1)\right)^* .$$

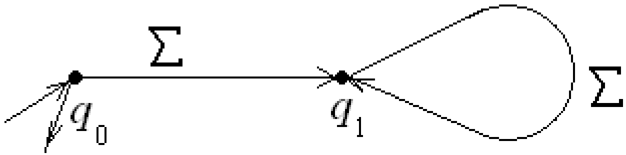
По теореме из §4, существует ДКА, допускающий тот же язык.

Следствие.
Любой конечный язык допускается конечным автоматом.

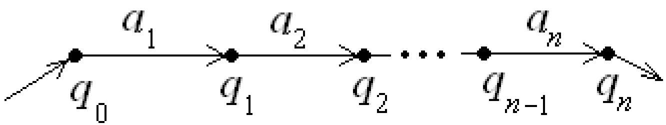
Доказательство:
Конечный язык – конечное множество слов конечной длины.

1. Если язык пустой (т.е. пустое множество), то он допускается любым ДКА с пустым множеством Q_F заключительных состояний.

2. Если язык состоит из одного пустого слова, то он допускается ДКА $A = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \varphi, q_0, \{q_0\})$, где $\varphi(q_0, x) = q_1$, $\varphi(q_1, x) = q_1$.



3. Если язык состоит из одного не пустого слова $w = a_1 \ldots a_n$, то он допускается НКА $A = (\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \varphi, q_0, \{q_n\})$, где $\varphi(q_0, a_1) = q_1$, …, $\varphi(q_{n-1}, a_n) = q_n$.



По теореме из §4, существует ДКА, допускающий тот же язык.

4. Если язык $L = \{w_1, \ldots w_m\}$, то $L = \{w_1\} \cup \ldots \cup \{w_m\}$.

Каждый язык $\{w_i\}$ допускается ДКА.

Объединение языков допускается автоматом, упоминавшимся в доказательстве теоремы о замкнутости.

Опр. Язык называется регулярным, если он получается из конечных языков применением операций объединения, произведения, итерации.

Обозначим $\Omega_{\text{рег}}$ класс всех регулярных языков над фиксированным алфавитом Σ.

Теорема (Клини).

$\Omega_{\text{рег}} = \Omega_{\text{авт}}$.

Доказательство $\Omega_{\text{рег}} \subseteq \Omega_{\text{авт}}$ следует из теоремы о замкнутости класса $\Omega_{\text{авт}}$ и утверждения о конечных языках.

Включение $\Omega_{\text{рег}} \supseteq \Omega_{\text{авт}}$ оставим без доказательства.

Замечание:
Для описания регулярного языка используется регулярное выражение без фигурных скобок.

Например. Для $L = \{a\}^{*} \cdot (\{abba\} \cup \{aa\}) \cdot (\{b\} \cdot \{b\}^{*})$ используется $L = a^{*} \cdot (ab^{2}a \cup a^{2}) \cdot b^{n}$ или $L = a^{*}(ab^{2}a + a^{2})b^{n}$.