§3. Теоремы, связанные с основными определениями

Теорема 1.
(1) Если в графе вершины $u \neq v$ и существует $(u - v)$-маршрут, то существует $(u - v)$-цепь, и существует простая $(u - v)$-цепь.

(2) Если в графе существует цикл, то существует простой цикл.

Доказательство:
(1) Пусть существует $(u - v)$-маршрут, в котором есть совпавшие ребра:

$$u = v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_l, \underbrace{e_l, \ldots,}_{\substack{\text{можно} \\ \text{удалить}}} e_l, \ldots, e_{k-1}, v_k = v$$
.

После удаления куска остается маршрут с меньшим количеством повторяющихся ребер.

После нескольких удалений получим цепь.

Пусть существует $(u - v)$-цепь, в которой есть совпавшие вершины:

$$u = v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{l-1}, \underbrace{v_l, \ldots,}_{\substack{\textit{можно}\\ \textit{удалить}}} v_l, \ldots, e_{k-1}, v_k = v \;.$$

После удаления куска остается цепь с меньшим количеством повторяющихся вершин.

После нескольких удалений получим простую цепь.

(2) Пусть существует цикл, в котором есть совпавшие вершины:

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{l-1}, \underbrace{v_l, \ldots,}_{\substack{\text{можно} \\ \text{удалить}}} v_l, \ldots, e_{k-1}, v_k = v_1 \, .$$

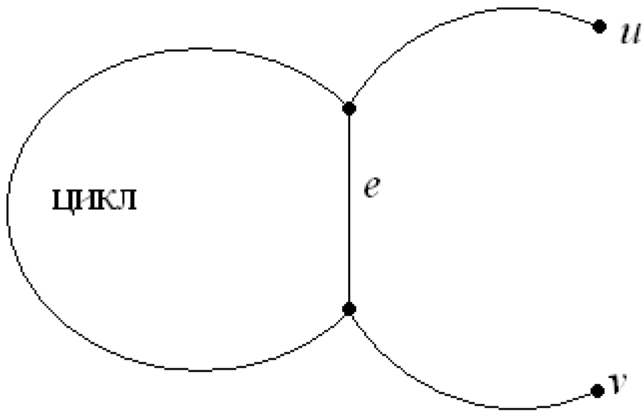
После удаления куска остается цикл с меньшим количеством повторяющихся вершин.

После нескольких удалений получим простой цикл.
Теорема доказана.

Теорема 2 (о разрыве циклов).
Если граф G связен, и ребро $e \in$ циклу, то $G \setminus e$ тоже связен.

Доказательство:
Пусть произвольные вершины $u \neq v$.
Т.к. G связен, существует $(u - v)$-цепь.
Если ребро e не принадлежит этой цепи, то $(u - v)$-цепь существует и в $G \setminus e$.

Если ребро *e* принадлежит этой цепи, то заменив *e* на остальную часть цикла (как на рисунке) получим (u – v)-маршрут в $G \setminus e$.



Теорема доказана.

Теорема 3.
В обыкновенном графе число вершин нечётной степени – чётно.

Доказательство:

$$\sum_{v\in V}\rho(v)=2m$$ – «Лемма о рукопожатиях».

Пусть V_1 – множество вершин нечётной степени, V_2 – множество вершин чётной степени.

$$\sum_{v\in V_1}\rho(v)+\sum_{v\in V_2}\rho(v)=2m.$$

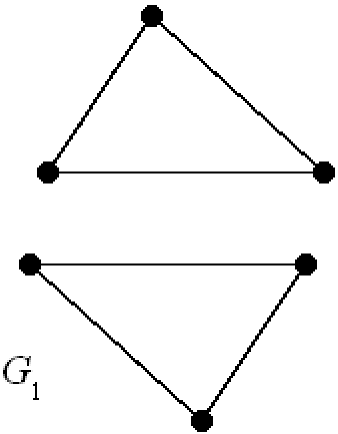
$$\sum_{v\in V_1}\rho(v)+\sum_{v\in V_2}\rho(v)=2m.$$

Т.к. $\sum_{v\in V_2}\rho(v)$ – чётно, и $2m$ – чётно, то $\sum_{v\in V_1}\rho(v)$ – чётно.

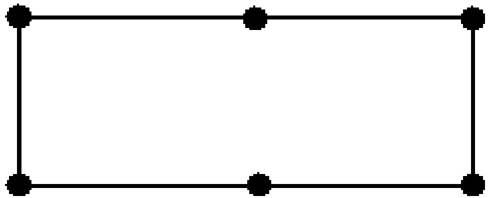
Сумма нечётных чисел будет чётной, только если их количество чётно. Т.е. количество вершин в V_1 чётно. Теорема доказана.

Теорема 4 (без доказательства).
Если графы G_1 и G_2 изоморфные, то количества вершин заданной степени совпадают.

Пример (показывает, что обратное утверждение не верно):



G_1



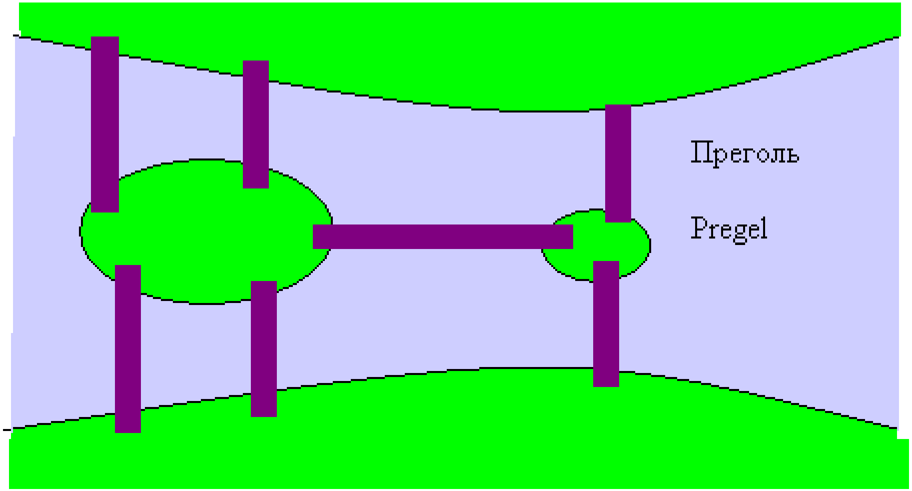
G_2

§4. Эйлеровы графы

Опр. Эйлеровым циклом в графе называется цикл, проходящий по всем ребрам графа (т.е. по каждому ребру ровно один раз).

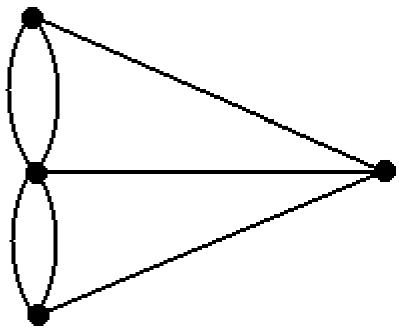
Опр. Эйлеров граф – граф, содержащий эйлеров цикл.

Задача о Кёнигсбергских мостах.



Вопрос: можно ли составить маршрут для прогулки, так, чтобы пройти по каждому мосту ровно один раз и вернуться в место, откуда начинается прогулка?

Задача равносильна задаче поиска эйлерова цикла в графе:



Теорема (Эйлера о циклах).

Пусть граф G без петель и изолированных вершин.

Граф G эйлеров $\Leftrightarrow$ G связный, и степени всех вершин чётные.

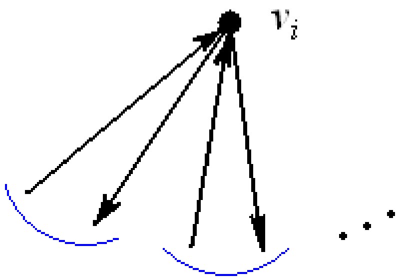
Теорема (Эйлера о циклах).
Пусть граф G без петель и изолированных вершин.
Граф G эйлеров $\Leftrightarrow$ G связный, и степени всех вершин чётные.

Доказательство:
$\Rightarrow$) Дано: в G существует эйлеров цикл.

1. Для любых вершин u и v существуют ребра, инцидентные вершинам. Эти ребра принадлежат эйлерову циклу, следовательно, вершины u и v принадлежат эйлерову циклу. Часть эйлерова цикла между u и v является $(u – v)$-маршрутом. Т.е. G связный.

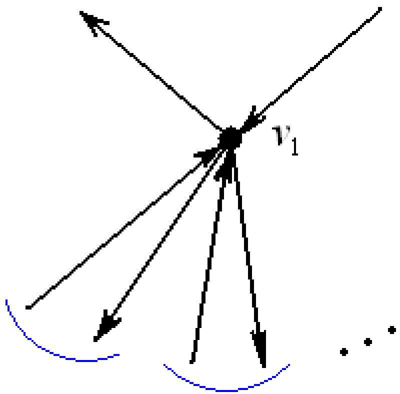
2. Пусть $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_m, v_1$ – эйлеров цикл.

Для каждой вершины $v_i \neq v_1$ выполняется:



Ребра сгруппированы попарно, следовательно, $\rho(v_i)$ чётная.

Для вершины v_1 выполняется:



Ребра сгруппированы попарно, следовательно, $\rho(v_1)$ чётная.

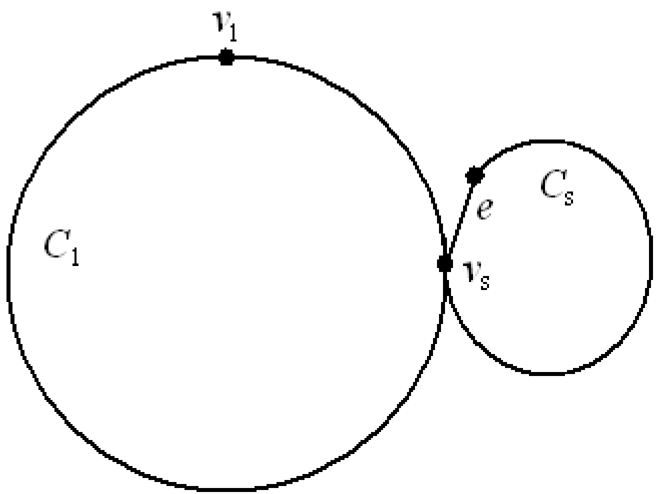
$\Leftarrow$) Дано: G связный, и степени всех вершин чётные.
Алгоритм построения эйлерова цикла.
1) Выберем любую вершину в качестве начальной v_1.
Построим цикл $C_1 = v_1, \ldots$, стирая пройденные ребра. Остановка возможна только при возвращении в вершину v_1.

Пусть C_1 не эйлеров. Тогда существует ребро (u, v), не принадлежащее C_1. Т.к. G связный, существует маршрут от v_1 к u. Тогда либо u принадлежит C_1, либо найдется другая вершина, в которой маршрут отклоняется от цикла C_1.

Следовательно, найдется не принадлежащее циклу ребро e, инцидентное вершине v_s, принадлежащей C_1.

Начиная с v_s построим новый цикл $C_s = v_s, e, \dots$, также стирая пройденные ребра. Остановка возможна только при возвращении в вершину v_s (т.к. в графе $G \setminus C_1$ степени вершин остаются чётными).

Построим цикл $C = \underbrace{v_1, \dots, v_s}_{начало\, C_1}, \overbrace{e, \dots,}^{C_s} \underbrace{v_s, \dots, v_1}_{окончание\, C_1}$. Он содержит ребро e.



Если цикл *C* не эйлеров, повторяем, пока все ребра не войдут в цикл. Теорема доказана.