§5. Двусвязность

В данном параграфе рассматриваются только обыкновенные графы.

Опр. Точкой сочленения в связном графе G называется вершина u, такая, что $G \setminus u$ не связный.

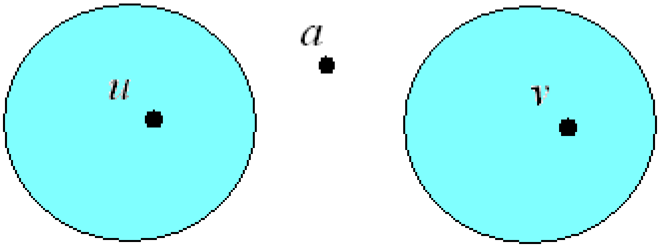
Опр. Мостом в связном графе G называется ребро e, такое, что $G \setminus e$ не связный.

Опр. Граф G называется двусвязным, если он связный, и не содержит мостов и точек сочленения.

Опр. Блоком (компонентой двусвязности) называется максимальный двусвязный подграф.

Теорема (признак точки сочленения).
Пусть G – связный граф.
Вершина a является точкой сочленения $\Leftrightarrow$ существуют вершины u и v, отличные от a, такие, что любая $(u - v)$-цепь проходит через a.

Доказательство:
$\Rightarrow$) По определению точки сочленения, $G \setminus a$ не связен, т.е. имеет хотя бы две компоненты связности. Выберем вершины u и v из разных компонент связности.



В G существует $(u - v)$-цепь, в $G \setminus a$ такой цепи нет, следовательно, эта цепь проходит через a.

$\Leftarrow$) Дано: существуют вершины u и v, отличные от a, такие, что любая $(u - v)$-цепь проходит через a.

Для этих вершин u и v в графе $G \setminus a$ не существует $(u - v)$-цепи, т.е. $G \setminus a$ не связен.

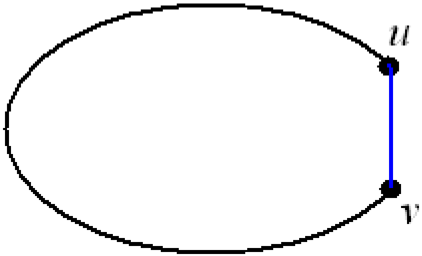
Теорема (признак моста).
Пусть G – связный граф.
Ребро e является мостом $\Leftrightarrow$ e не содержится ни в одном цикле.

Доказательство:
$\Rightarrow$) Дано: ребро e является мостом.

(от противного) Предположим, что $e \in$ циклу. По теореме о разрыве циклов, $G \setminus e$ связен. Противоречие.

$\Leftarrow$) Дано: ребро $e = (u, v)$ не содержится ни в одном цикле.

Предположим, что в $G \setminus e$ существует $(u - v)$-цепь.



Тогда в G существует цикл, проходящий через e, противоречие.
Следовательно, в $G \setminus e$ не существует $(u - v)$-цепи, т.е. $G \setminus e$ не связен.
Теорема доказана.

Теорема.
Различные два блока имеют не более одной общей точки, причем это точка сочленения.

Опр. Вершинной связностью графа G называется минимальное количество вершин, при удалении которых получается несвязный граф или одновершинный.

$k(G)$

Примеры.

1. Если G несвязный, то $k(G) = 0$.
2. Если G связный и содержит точку сочленения, то $k(G) = 1$.
3. Если G двусвязный, то $k(G) \geq 2$.

Опр. Реберной связностью графа G называется минимальное количество ребер, при удалении которых получается несвязный граф или пустой.

$\lambda(G)$

Примеры.

1. Если G несвязный, то $\lambda(G) = 0$.
2. Если G связный и содержит мост, то $\lambda(G) = 1$.
3. Если G двусвязный, то $\lambda(G) \geq 2$.

Теорема.
Для любого графа G выполняется $k(G) \leq \lambda(G)$.

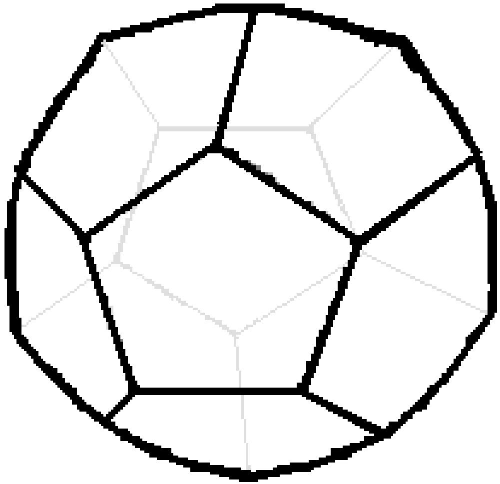
§6. Гамильтоновы графы

В данном параграфе рассматриваются только обыкновенные графы.

Опр. Гамильтоновым циклом в графе называется простой цикл, проходящий по всем вершинам графа (т.е. по каждой вершине ровно один раз).

Опр. Гамильтонов граф – граф, содержащий гамильтонов цикл.

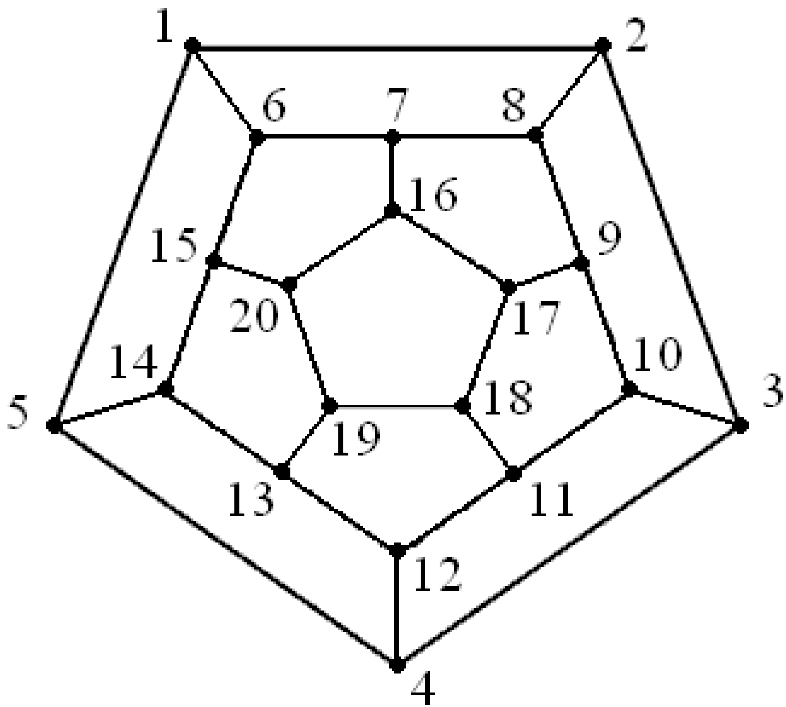
Задача о кругосветном путешествии.
Правильный многогранник додекаэдр (12 граней, каждая грань – правильный пятиугольник), вырезанный из дерева, означает земной шар. Вершины многогранника соответствуют крупным городам (столицам), ребра многогранника соответствуют дорогам между городами.



Вопрос: можно ли составить маршрут кругосветного путешествия, так, чтобы посетить все столицы, каждую ровно один раз, и вернуться в город, с которого начинается путешествие?

Очевидно, вершины и ребра многогранника образуют граф, а кругосветное путешествие является циклом в графе, проходящим через каждую вершину ровно один раз (т.е. гамильтоновым циклом).

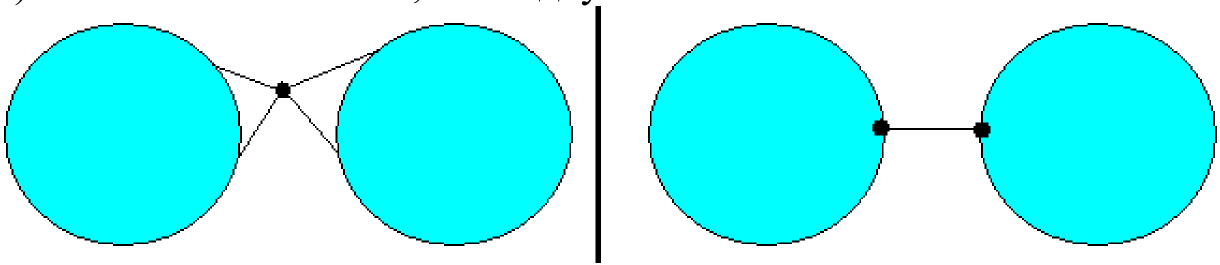
Граф, полученный из додекаэдра, является гамильтоновым. Для доказательства изобразим этот граф, уложенным на плоскости.


1
2
6
7
8
16
15
9
20
17
14
10
5
18
3
19
13
11
12
4

Необходимые условия гамильтоновости:

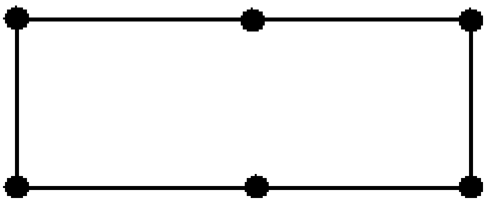
1) Если G гамильтонов, то он связный.

2) Если G гамильтонов, то он двусвязный.

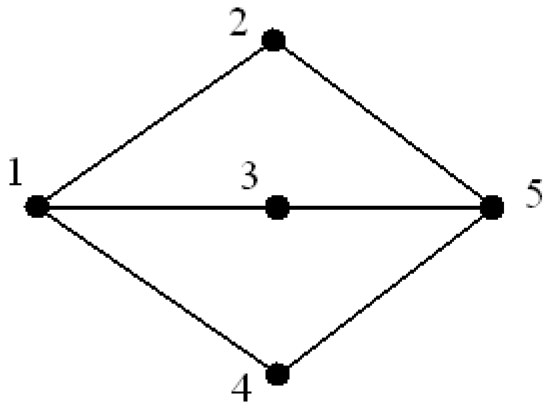


Достаточное условие гамильтоновости:
Теорема (Дирака).
Пусть G – обыкновенный связный граф, содержащий n > 2 вершин, и для каждой вершины u выполняется $\rho(u) \geq \frac{n}{2}$. Тогда G гамильтонов.

Пример (показывает, что достаточное условие не является необходимым).

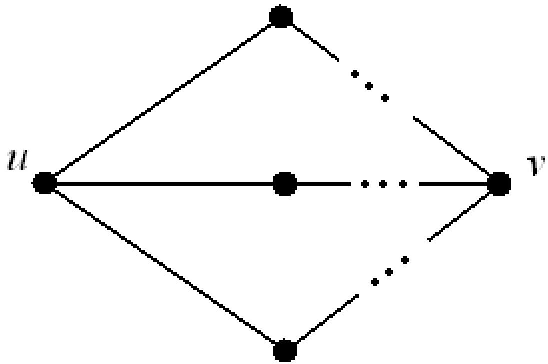


Пример.



1, 2, 5, 3, 1 – не проходит через 4;
1, 2, 5, 4, 1 – не проходит через 3.

Опр. Тэта-графом называется граф, содержащий две вершины *u* и *v* степени 3, соединенные тремя цепями, содержащими не менее одной вершины, отличной от *u* и *v*.



Необходимое условие негамильтоновости:
Если двусвязный граф не гамильтонов, то он содержит тэта-подграф.

Опр. Обобщёнными точками сочленения в связном графе называются s вершин, удалив которые получаем не менее $(s + 1)$ компонент связности.

Достаточное условие негамильтоновости:
Если граф содержит обобщенные точки сочленения, то он не гамильтонов.

Переборный алгоритм проверки существования гамильтонова цикла:

Пусть $V=\{v_1,\dots,v_n\}$.
Рассмотрим все перестановки элементов множества V.
Для каждой перестановки $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ проверим, является ли она циклом в графе, т.е. смежны ли α_{i-1} и α_i для каждого i, и смежны ли α_n и α_1.

Проверка одной перестановки на цикл занимает время, пропорциональное n^2 (или $n\cdot\max(\rho(v))$).
Однако всего перестановок $n!$ (n-факториал). Поэтому время выполнения алгоритма с ростом размера графа растет быстрее, чем экспонента.

В теории алгоритмов, при исследовании сложности алгоритмов рассматривают класс NP-полных задач, для которых существуют переборные алгоритмы (экспоненциальной сложности), но не найдены полиномиальные алгоритмы.

Задача о гамильтоновом цикле принадлежит классу NP-полных задач.