§3. Нормальные формы в логике предикатов

Опр. Формула F имеет предварённую нормальную форму (ПНФ), если $F = (Q_1 x_1) \ldots (Q_n x_n)\ H$, где $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, H не содержит кванторов.

Теорема.
Для всякой формулы F существует равносильная формула, имеющая ПНФ.

Доказательство:

Алгоритм приведения к ПНФ.

1. Исключить эквиваленцию и импликацию (по законам 21 и 20).

2. Занести отрицание к атомарным формулам (по законам де Моргана 17 и 18 и законам переноса отрицания через кванторы 26, 27).

3. Вынести кванторы вперед, используя (если нужно) переименование переменных (по законам 22, 23, 28 – 33).

Пример. Привести к ПНФ

$$F = (\forall x)(\exists y)P(x, y) \to (\forall x)(\exists y)Q(x, y) =$$

$$= \neg(\forall x)(\exists y)P(x, y) \vee (\forall x)(\exists y)Q(x, y) =$$

$$= (\exists x)(\forall y)\neg P(x, y) \vee (\forall x)(\exists y)Q(x, y) =$$

$$= (\exists x)(\forall y)\neg P(x, y) \vee (\forall u)(\exists v)Q(u, v) =$$

$$= (\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x, y) \vee Q(u, v)).$$

Опр. Формула F имеет сколемовскую нормальную форму (СНФ), если $F = (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\ H$, где H не содержит кванторов и имеет КНФ.

Теорема.
Для всякой формулы F существует формула, имеющая СНФ, одновременно с F выполнимая или невыполнимая.

Доказательство:

Алгоритм приведения к СНФ.

1, 2, 3 – из алгоритма приведения к ПНФ.
Результат $F \equiv (Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)\ H$.

4. Бескванторную часть H привести к КНФ.

5. Исключить кванторы существования, поочередно слева направо, применяя одно из двух правил:

1 случай) $(\exists x_1)(Q_2 x_2)\ldots H(x_1, x_2, \ldots) \sim (Q_2 x_2)\ldots H(a, x_2, \ldots)$, где a – символ константы.

2 случай) $(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\exists x_{k+1})\ldots H(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) \sim$
$\sim (\forall x_1)\ldots(\forall x_k)\ldots H(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k), \ldots)$, где $f(x_1, \ldots, x_k)$ – символ функции, зависящей от переменных $x_1, \ldots, x_k$.

При выполнении 1, 2, 3, 4 шагов алгоритма получается формула, равносильная F, следовательно, выполнимая или не выполнимая одновременно с F.

Если существует интерпретация φ на модели M, при которой формула $(\exists x_1)(Q_2 x_2)\ldots H(x_1, x_2, \ldots)$ истинна, то существует значение $x_1 = a_1 \in M$, такое, что при этой же интерпретации φ на модели M значение $(Q_2 x_2)\ldots H(a_1, x_2, \ldots)$ истинно. Т.е. формула $(Q_2 x_2)\ldots H(a, x_2, \ldots)$ выполнима.

Если существует интерпретация φ на модели M, при которой формула $(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)(\exists x_{k+1})\ldots H(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots)$ истинна, то для любых значений переменных $x_1 = a_1,\ldots,x_k = a_k$ существует подходящее значение $x_{k+1} = a_{k+1}$, такое, что при этой же интерпретации φ на модели M значение $(Q_{k+2}x_{k+2})\ldots H(a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},x_{k+2}\ldots)$ истинно. Т.е. существует функция $f(x_1,\ldots,x_k)$ ($a_{k+1} = f(a_1,\ldots,a_k)$), для которой формула $(\forall x_1)\ldots(\forall x_k)\ldots H(x_1,\ldots,x_k,f(x_1,\ldots,x_k),\ldots)$ выполнима.
Теорема доказана.

Пример. Привести к СНФ

$$F = (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y) = \ldots =$$

$$= (\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x, y) \vee Q(u, v) \sim$$

$$\sim (\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(a, y) \vee Q(u, v)) \sim$$

$$\sim (\forall y)(\forall u)(\neg P(a, y) \vee Q(u, f(y, u))) .$$

§4. Метод резолюций для замкнутых формул в логике предикатов

Опр. Формула F логики предикатов называется замкнутой, если она не содержит свободных переменных.

Формула F логики предикатов называется открытой – в противном случае.

Замечание: Для любой интерпретации φ замкнутой формулы F, $\varphi(F)$ является высказыванием.
Для открытой формулы F результат интерпретации – предикат, содержащий хотя бы одну переменную.

Пусть $F_1, F_2, \dots, F_n, G$ – замкнутые формулы логики предикатов. Метод резолюций применяется для доказательства того, что G является логическим следствием $F_1, F_2, \dots, F_n$.

При этом доказываем, что $\{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ – невыполнимо.

Опр. Подстановкой называется множество равенств $\sigma = \{ x_1 = t_1, \ldots, \ x_n = t_n \}$, где $x_1, \ldots, x_n \in V$, t_i – терм, не содержащий x_i .

Обозначение: $\sigma(F)$ – формула, полученная из F подстановкой σ.

Опр. (повторно). Литерал – атомарная формула $P(t_1,\ldots,t_n)$, или ее отрицание $\neg P(t_1,\ldots,t_n)$.

Дизъюнкт (элементарная дизъюнкция) – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр. Пустой дизъюнкт – дизъюнкт, не содержащий литералов.
$\square$

Пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации на любой модели.

Опр. Правило резолюций в логике предикатов – из дизъюнктов $\neg P(t_1,\ldots,t_n)\vee H_1$ и $P(s_1,\ldots,s_n)\vee H_2$ выводится дизъюнкт $\sigma(H_1)\vee\sigma(H_2)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают.

«Наиболее общий унификатор».

Опр. Правило склейки в логике предикатов – из дизъюнкта $P(t_1,\ldots,t_n)\vee P(s_1,\ldots,s_n)\vee H$ выводится дизъюнкт $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(H)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают.

Либо – из дизъюнкта $\neg P(t_1,\ldots,t_n)\vee\neg P(s_1,\ldots,s_n)\vee H$ выводится дизъюнкт $\sigma(\neg P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(H)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают.

Опр. Пусть S множество дизъюнктов. Будем говорить, что дизъюнкт D_n выводится из S, если существует последовательность дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$, такая, что каждый D_i либо принадлежит S, либо получен по правилу резолюций из дизъюнктов среди $D_1, D_2, \ldots, D_{i-1}$, либо получен по правилу склейки.

Вывод D_n из S – эта последовательность $D_1, D_2, \ldots, D_n$.

Теорема.
Множество дизъюнктов S логики предикатов невыполнимо $\Leftrightarrow$ из S выводится пустой дизъюнкт.

Доказательство достаточности:
$\Leftarrow$) Дано: из S выводится пустой дизъюнкт.

Заметим, что правило резолюций и правило склейки сохраняют истинность при некоторой интерпретации φ, если **для всех свободных переменных подразумевается квантор общности**.

1) если $\varphi(\neg P(t_1,\ldots,t_n)\vee H_1)=1$ и $\varphi(P(s_1,\ldots,s_n)\vee H_2)=1$, и существует подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))$ и $\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))$ совпадают, то $\varphi(\sigma(\neg P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(H_1))=1$ и $\varphi(\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))\vee\sigma(H_2))=1$.

Либо $\varphi(\sigma(H_1))=1 \Rightarrow \varphi(\sigma(H_1)\vee\sigma(H_2))=1$.
Либо $\varphi(\sigma(H_1))=0 \Rightarrow \varphi(\sigma(\neg P(t_1,\ldots,t_n)))=1 \Rightarrow$
$\varphi(\sigma(P(s_1,\ldots,s_n)))=0 \Rightarrow \varphi(\sigma(H_2))=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(\sigma(H_1)\vee\sigma(H_2))=1$.

2) если $\varphi(P(t_1,\ldots,t_n)\vee P(s_1,\ldots,s_n)\vee H)=1$, то $\varphi(\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(P(s_1,\ldots,s_n))\vee\sigma(H))=1$.

Тогда $\varphi(\sigma(P(t_1,\ldots,t_n))\vee\sigma(H))=1$.

(от противного) Предположим S выполнимо, т.е. существует интерпретация φ на модели M, и существует подстановка σ, при которых все дизъюнкты в S истинны для всех значений переменных. Тогда истинны все дизъюнкты в последовательности $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, \square$.

Т.е. $\varphi(\sigma(\square)) = 1$ – противоречие.
S невыполнимо. Достаточность доказана.

Схема применения метода резолюций.

Дано: $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$.

1. Формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G$ привести к СНФ.

2. Отбросить кванторы общности.

3. Все получившиеся дизъюнкты собрать в множество S.

4. Построить вывод $\square$ из S.

Пример. Доказать методом резолюций, что G является логическим следствием формул F_1, F_2:

$$F_1 = (\forall x)(A(x) \to (\exists y)D(x, y));$$
$$F_2 = (\forall x)(\forall y)(D(x, y) \to B(x));$$
$$G = (\forall x)(A(x) \to B(x)).$$

$$F_1 \equiv (\forall x)(\neg A(x) \vee (\exists y)D(x, y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \vee D(x, y)) \sim$$
$$\sim (\forall x)(\neg A(x) \vee D(x, f(x))).$$

$$F_2 \equiv (\forall x)(\forall y)(\neg D(x, y) \vee B(x)).$$

$$\neg G = \neg(\forall x)(\neg A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)(A(x) \,\&\, \neg B(x)) \sim (A(a) \,\&\, \neg B(a)).$$

$$S = \{\neg A(x) \vee D(x, f(x)),\ \neg D(x, y) \vee B(x),\ A(a),\ \neg B(a)\}.$$

$$\neg A(x) \vee D(x, f(x)),\ \neg D(x, y) \vee B(x),\ \{y = f(x)\}, \neg A(x) \vee B(x),$$
$$A(a), \{x = a\}, B(a), \neg B(a),\ \square.$$

Замечание:

$\{(\forall x)A(x),\ (\forall y)\neg A(y)\}$ – невыполнимо.

$\{(\forall x)A(x),\ (\exists y)\neg A(y)\}$ – невыполнимо.

$\{A(x),\ \neg A(y)\}$ – выполнимо.

$\{A(x),\ \neg A(x)\}$ – невыполнимо.