§11. Моноид переходов автомата. Распознавание языков моноидами, критерий регулярности. Синтаксический моноид языка.

Опр. Пусть A – ДКА (Q, Σ, φ, q_0, Q_F). Моноидом переходов автомата A называется M(A) = { $f_w : Q \to Q \mid \varphi(q, w) = f_w(q)$ }, где

$\varphi(q, w)$ – короткое обозначение результата перехода ДКА из состояния q по слову w.

Замечание: M(A) является подмножеством симметрической полугруппы на Q.

Пример. Автомат для продажи кофе, где монета 5 соответствует символу *a*, монета 10 соответствует символу *b*.

	a	*b*	заключ.
0	1	2	0
1	2	2	0
2	1	2	1

Запишем в таблицу результаты переходов ДКА по словам

	ε	*a*	*b*	*aa*	*bb* = *b*	*ab* = *b*	*ba*	*aaa* = *a*	…
0	0	1	2	2	2	2	1	1	
1	1	2	2	1	2	2	1	2	
2	2	1	2	2	2	2	1	1	

M(A) = { f_ε, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba} ,… }

M(A) = { $f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba}, \ldots$ }

Составим таблицу Кэли для функций $f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba}$ с операцией суперпозиция:

*	f_ε	f_a	f_b	f_{aa}	f_{ba}
f_ε	f_ε	f_a	f_b	f_{aa}	f_{ba}
f_a	f_a	f_{aa}	f_b	f_a	f_{ba}
f_b	f_b	f_{ba}	f_b	?	f_{ba}
f_{aa}	f_{aa}	f_a	f_b	?	f_{ba}
f_{ba}	f_{ba}	?	f_b	?	f_{ba}

*	f_ε	f_a	f_b	f_{aa}	f_{ba}
f_ε	f_ε	f_a	f_b	f_{aa}	f_{ba}
f_a	f_a	f_{aa}	f_b	f_a	f_{ba}
f_b	f_b	f_{ba}	f_b	f_b	f_{ba}
f_{aa}	f_{aa}	f_a	f_b	f_{aa}	f_{ba}
f_{ba}	f_{ba}	f_b	f_b	f_{ba}	f_{ba}

$$f_{ba} * f_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_b \,;$$

$$f_b * f_{aa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_b \,;$$

$$f_{aa} * f_{aa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_{aa};$$

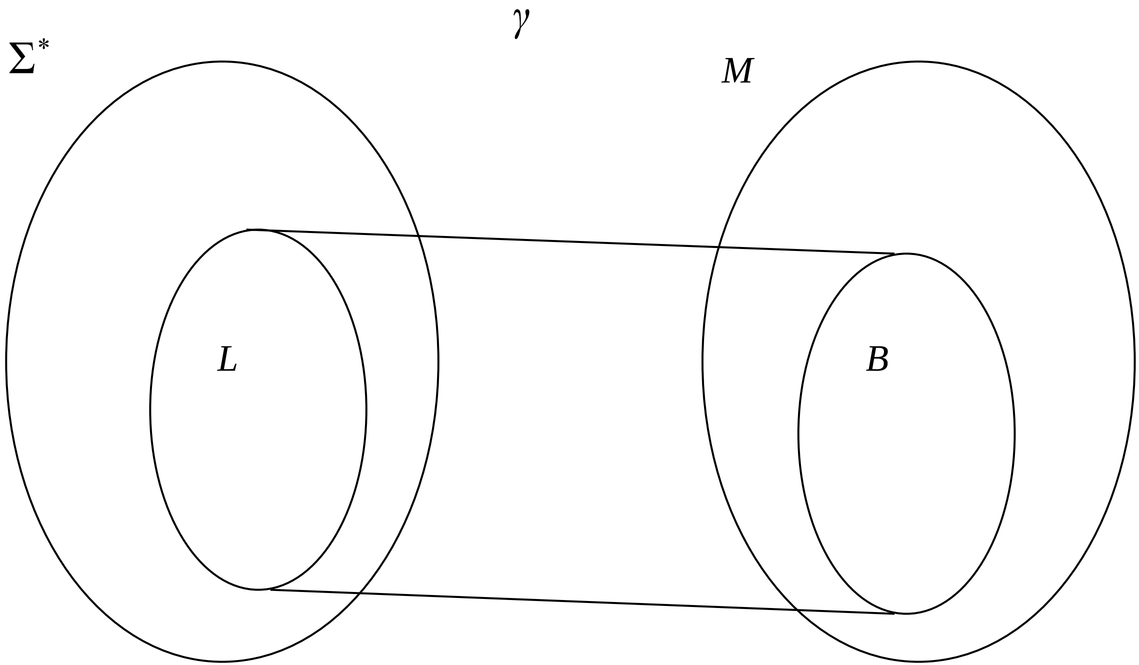
$$f_{ba} * f_{aa} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_{ba}.$$

В таблице нет пустых ячеек, следовательно $\{ f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba} \}$ замкнуто относительно суперпозиции.
M(A) = $\{ f_\varepsilon, f_a, f_b, f_{aa}, f_{ba} \}$.

Замечание: моноид M(A) порождается функциями f_a, f_b с обязательным добавлением тождественной функции f_ε.

Опр. Гомоморфизмом полугруппы $(A,\cdot)$ в полугруппу $(M,\circ)$ называется всюду определенное отображение γ из A в M, сохраняющее операцию, т.е. $\gamma(a \cdot b) = \gamma(a) \circ \gamma(b)$

Опр. Пусть $(M,\circ)$ – произвольный моноид. Будем говорить, что моноид M распознает язык L над алфавитом Σ, если существует гомоморфизм γ из $(\Sigma^*,\cdot)$ в $(M,\circ)$ и существует $B \subseteq$ M: $L = \gamma^{-1}(B)$ (полный прообраз множества B).



Σ^*
γ
M
L
B

Теорема. Язык L регулярный $\Leftrightarrow$ L распознается конечным моноидом.

Доказательство:

$\Rightarrow$) Дано: L регулярный.

Опр. Назовем синтаксической конгруэнцией языка L отношение $\approx_L$ на Σ^*: $u \approx_L v \;\Leftrightarrow\; \forall x, y \in \Sigma^* : (xuy \in L \leftrightarrow xvy \in L)$.

Замечание: конгруэнция – отношение эквивалентности, сохраняющееся при операции: $u_1 \approx_L v_1,\; u_2 \approx_L v_2 \Rightarrow u_1 \cdot u_2 \approx_L v_1 \cdot v_2$.

Д/З – доказать, что $\approx_L$ является конгруэнцией на $(\Sigma^*, \cdot)$.

Лемма. Язык L регулярный $\Rightarrow$ отношение $\approx_L$ имеет конечный индекс.

Доказательство леммы:

Пусть A – ДКА (Q, Σ, φ, q_0, Q_F), допускающий L.

Рассмотрим моноид переходов автомата A

M(A) = { $f_w : Q \to Q \mid \varphi(q, w) = f_w(q)$ }.

Определим на Σ^* отношение ρ: $u \rho v \Leftrightarrow f_u = f_v$.

Количество функций в M(A) не превышает $|Q|^{|Q|}$, следовательно, количество классов эквивалентности по ρ конечно.

Покажем, что $u \, \rho \, v \Rightarrow u \approx_L v$.

$$u \, \rho \, v \Leftrightarrow f_u = f_v \Leftrightarrow \forall x, y : f_{xuy} = f_x * f_u * f_y = f_{xvy} \Leftrightarrow xuy \, \rho \, xvy.$$

$$xuy \in L \leftrightarrow xvy \in L \; . \; \Rightarrow u \approx_L v \; .$$

Количество классов эквивалентности по $\approx_L$ не превышает количества классов по ρ, следовательно, конечно.

Лемма доказана.

Отношение $\approx_L$ имеет конечный индекс.

Рассмотрим фактор множество M = $\Sigma^*{}_{/\approx_L}$, состоящее из классов эквивалентности по отношению $\approx_L$. Обозначим $[u]$ класс, содержащий слово u. Введем операцию $\circ$:
$[u] \circ [v] = [uv]$.

$(M, \circ)$ – моноид, где нейтральным элементом является $[\varepsilon]$.

Определим отображение γ из $(\Sigma^*,\cdot)$ в $(M,\circ)$: $\forall u \in \Sigma^* \;\; \gamma(u) = [u]$.
Отображение γ всюду определенное и сохраняет операцию, следовательно, является гомоморфизмом из $(\Sigma^*,\cdot)$ в $(M,\circ)$.

Выберем B = γ(L).

Покажем, что $L = \gamma^{-1}(B)$.
(от противного) Предположим, $w \notin L,\ \gamma(w) \in B$
$\Rightarrow \exists u \in L:\ [w] = [u] \ \Rightarrow w \approx_L u \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon u \varepsilon \in L \leftrightarrow \varepsilon w \varepsilon \in L) \Rightarrow$

$\Rightarrow w \in L$ – противоречие. Следовательно, $\forall w : \gamma(w) \in B \Rightarrow w \in L$.

$\Leftarrow$) Дано: L распознается конечным моноидом $(M,\circ)$. Пусть γ – гомоморфизм из $(\Sigma^*,\cdot)$ в $(M,\circ)$.

Построим ДКА A = (*M*, Σ, φ, e, B),
e – нейтральный элемент моноида M,
$\varphi(m,a) = m \circ \gamma(a)$.

Покажем, что L(A) = A.
$\forall w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^* \to \varphi(e,w) = e \circ \gamma(a_1) \circ \ldots \circ \gamma(a_n) = \gamma(w)$,
$w \in L \Leftrightarrow \gamma(w) \in B \Leftrightarrow w \in L(A)$.

Опр. Синтаксическим моноидом языка L называется фактор-множество M = $\Sigma^*{}_{/\approx_L}$, состоящее из классов эквивалентности по отношению $\approx_L$, с операцией $\circ$: $[u] \circ [v] = [uv]$.