П 1. Пусть $P(x, y) =$ « x ≤ y » на $\mathbb{N}$. Записать следующие предикаты формулами в заданной сигнатуре:
а) « $x < y$ »;
б) « $y = x + 1$ »;
в) « $x = 1$ »;
г) « $x = 2$ ».

П 2. Пусть $P(x, y) =$ « $x \mid y$ (x делит y)» на $\mathbb{N}$. Записать следующие предикаты формулами в заданной сигнатуре:
а) « $x = 1$ »;
б) « $z =$ НОД(x, y) »;
в) « $z =$ НОК(x, y) »;
г) « x – простое число ».

П 3. Пусть $P(x)$ произвольный одноместный предикат на M, $Q(x, y) =$ « $x = y$ ». Записать следующие предикаты формулами в заданной сигнатуре:
а) « существует не менее одного x, удовлетворяющего свойству P »;
б) « существует не более одного x, удовлетворяющего свойству P »;
в) « существует ровно один x, удовлетворяющий свойству P »;
г) « существует не менее двух элементов, удовлетворяющих свойству P »;
д) « существует не более двух элементов, удовлетворяющих свойству P »;
е) « существует ровно два элемента, удовлетворяющих свойству P ».

П 4. Записать следующие рассуждения формулами логики предикатов в подходящей сигнатуре:
Некоторые из первокурсников знакомы со всеми второкурсниками, а некоторые из второкурсников – спортсмены. Следовательно, какие-то первокурсники знакомы с некоторыми спортсменами.

П 5. Равносильны ли формулы?
а) $F_1 = (\forall x)(A(x) \to B(x))$, $F_2 = (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$;
б) $F_2 = (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$, $F_3 = (\exists x)(\forall y)(A(x) \to B(y))$;
! в) $F_4 = (\exists x)(A(x) \to B(x))$, $F_5 = (\exists x)A(x) \to (\exists x)B(x)$.

П 6. Доказать равносильность формул.
а) $F_1 = \neg(\exists x)[(\forall y)P(x, y) \to (\forall z)(P(z, z) \vee Q(z))]$ и
$F_2 = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x, y) \,\&\, \neg P(z, z) \,\&\, \neg Q(z))$.
б) $F_1 = \neg(\forall x)[(\forall y)T(x, y) \to (\exists z)(T(x, z) \,\&\, Q(z))]$ и
$F_2 = (\exists x)(\forall u)(T(x, u) \,\&\, \neg Q(u))$.

П 7. Привести к ПНФ (предваренной нормальной форме):
а) $(\forall x)A(x) \to (\forall y)B(y)$;
б) $(\exists x)A(x) \to (\exists y)C(y)$;
в) $[(\forall x)A(x) \to (\forall y)B(y)] \vee [(\exists x)A(x) \to (\exists y)C(y)]$;
г) $(\forall x)P(x, y) \to (\exists z)[P(y, z) \vee (\forall u)(Q(u) \to P(z, z))]$.

П 8. Привести к СНФ (сколемовской нормальной форме):
а) $(\exists x)[P(x) \& (\forall y)(S(y) \to T(x, y))]$;
б) $(\forall x)[Q(x) \to (\exists y)(\forall u)(R(x, y) \& S(y, u))]$;
в) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)(L(x, y, z) \& M(z, u, v))$.

П 9. Доказать, что формула G не является логическим следствием формул F_i:
а) $F_1 = (\exists x)R(x) \to (\exists x)Q(x)$, $F_2 = \neg Q(a)$,
$G = (\forall x)\neg R(x)$.
б) $F_1 = (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \to R(y, x))$,
$F_2 = (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \& R(y, z) \to R(x, z))$, $G = (\forall x)R(x, x)$.

П 10. Записать формулы, соответствующие предложениям, и доказать их нелогичность.
Каждый первокурсник знаком с кем-либо из студентов второго курса. А некоторые второкурсники – спортсмены. Следовательно, каждый первокурсник знаком с кем-либо из спортсменов.

П 11. Доказать методом резолюций, что формула G является логическим следствием формул F_i:
$F_1 = (\forall x)(P(x) \to Q(x) \& R(x))$, $F_2 = (\exists x)(P(x) \& T(x))$,
$G = (\exists x)(R(x) \& T(x))$.

П 12. Записать формулы, соответствующие предложениям, и доказать методом резолюций их логичность.
Некоторые пациенты уважают всех докторов. Ни один пациент не уважает знахаря. Следовательно, никакой доктор не является знахарем.

П 13. Выполнима ли формула F? Если нет, используя метод резолюций доказать невыполнимость формулы.

~~в~~ а) $F = (\exists x)(\forall y)(Q(x, x) \,\&\, \neg Q(x, y))$.

~~г~~ б) $F = (\exists x)(\exists y)(P(x) \,\&\, \neg P(y))$.

~~д~~ в) $F = (\exists x)(\forall y)(Q(x, y) \to (\forall z)R(x, y, z))$.

П 14. Является ли F тождественно истинной? Используя отрицание формулы и метод резолюций доказать тождественную истинность формулы.

$F = (\exists x)(\forall y)Q(x, y) \to (\forall y)(\exists x)Q(x, y)$.