1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Аудиторные задачи по дискретной математике
МО-201 (2020/2021 уч.г.)

Тема: «Множества, булевы операции»

В1. Найти $\mathcal{B}(A)$, где

а) $A=\{1,2,3\}$;

б) $A=\{1,\{2,3\},1\}$;

в) $A=\{\varnothing\}$;

г) $A=\varnothing$;

д) $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

В2. Доказать:

а) $A\subseteq B \Leftrightarrow \overline{B}\subseteq \overline{A}$;

б) $A\subseteq B \Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$.

В3. Доказать равенство показав, что л.ч. $\subseteq$ п.ч., и наоборот:

а) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

б)* $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus(A\cap B\cap\overline{C})$.

– 3. Доказать равенство, используя свойства операций:

а) $(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$;

б) $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C=\overline{((A\cap B)\cup\overline{C})}$.

В4. Проиллюстрировать равенство на диаграммах Эйлера-Венна:

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

В5. Упростить выражение, используя свойства операций:

а) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$;

б) $(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)\cup(B\cap C)\cup(\overline{A}\cup B\cup C)$.

В6*. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} A\setminus X=B \\ X\setminus A=C \end{cases}$ где A, B, C – дано, X – нужно найти, $B\subseteq A$, $A\cap C=\varnothing$.

б) $\begin{cases} A\setminus X=B \\ A\cup X=C \end{cases}$ где A, B, C – дано, X – нужно найти, $B\subseteq A\subseteq C$.

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Тема: «Бинарные отношения»

B7. Используя определения свойств исследовать отношение R на M = {1, …, 9},
а) $R=\{(x,y)\mid\ |x-y|<4\}$;
б) $R=\{(x,y)\mid\ x \text{ и } y \text{ взаимно простые}\}$.

B8. Используя определения свойств исследовать отношение R на $M = \mathcal{B}$ ({1,2,3})
(т.е. M – булеан трехэлементного множества),
а) $R=\{(x,y)\mid x\subseteq y\}$;
– б) $R=\{(x,y)\mid x=A\setminus y\}$.

B9. Используя определения свойств исследовать отношение ρ на M = {множество всех слов над конечным алфавитом А}, $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ x и y не содержат ни одной общей буквы.

B10. Выполнить проверку свойств рефлексивности, симметричности, антисиммметричности бинарных отношений:

$$R_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix};\ R_2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

B11. Найти результаты всех операций с R_1 и R_2 (из B10), кроме замыканий.
Выполнить проверку транзитивности R_1 и R_2.

B12. Найти результаты всех замыканий R_1 и R_2 (из B10).

B13.
а) Доказать, что пересечение двух транзитивных отношений является транзитивным.
б) Доказать, что объединение двух транзитивных отношений **не является** транзитивным.
в) Сохраняются ли при пересечении / объединении б.о. рефлексивность, симметричность, антисимметричность?

B14. Доказать, что $R^+=R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n$, если R задано на конечном множестве M, и $|M|=n$.

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Темы: «Отношение эквивалентности» и «Отношение частичного порядка»

В15. Доказать, что бинарное отношение R, заданное матрицей, является отношением эквивалентности, построить разбиение.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В16. Построить диаграмму ч.у.м. ($\mathcal{B}(A), \subseteq$):

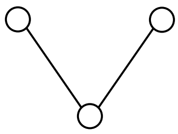
а) $A = \{1\}$;
б) $A = \{1, 2\}$;
в) $A = \{1, 2, 3\}$;
г) $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

В17. Доказать, что бинарное отношение R, заданное матрицей, является отношением частичного порядка, нарисовать диаграмму.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В18. Нарисовать диаграмму прямого произведения ч.у.м. A и B. Указать наименьший, наибольший, минимальный, максимальный элементы.

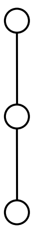
а)



A

B

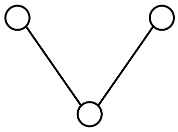
б)



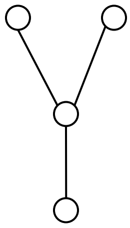
A

B

в)

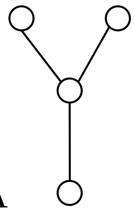


A

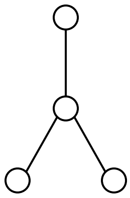


B

г)



A



B

В19. Нарисовать диаграммы ч.у.м. $(A_3, \subseteq)$, $(A_4, \subseteq)$, где
$A_3 =$ {все отношения эквивалентности на {a, b, c}};
$A_4 =$ {все отношения эквивалентности на {a, b, c, d}}.

В20. Перечислить все отношения частичного порядка на трехэлементном множестве. Найти среди них множество попарно неизоморфных ч.у.м..

В21. Доказать, что ($\mathcal{B}$ ({1, 2, 3, 4}), $\subseteq$) изоморфно
($\mathcal{B}$ ({1, 2, 3}), $\subseteq$) $\times$ ($\mathcal{B}$ ({4}), $\subseteq$).

В22*. Привести пример множества *M*, для которого существует отношение вполне упорядоченности *R*, такое, что R^{-1} тоже отношение вполне упорядоченности.

В23*. Перечислить все автоморфизмы ч.у.м. ({1, 2, 3, 6, 12, 18}, |).
Описать группу этих автоморфизмов.

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Тема: «Мощности множеств»

M0. Доказать теорему о мощностях числовых множеств: $\mathbf{N}\cup\{0\}$, **Z**, **Q**, (0,1), **R**.
M1. Найти мощность множества $\{x \mid x\in\mathbf{N},\ x^3+2x^2-5x+4>0\}$.
M2. Найти мощность множеств:

A_1 = {Все натуральные числа, кратные 1024};

$A_2 = 2^{A_1}$;

$A_3 = A_1^{1024}$;

M3. Найти мощность множества всех иррациональных чисел.
M4. Найти мощность множества всех прямых линий на плоскости.
M5. Доказать, что объединение двух счетных множеств – счетно.
M6. Доказать, что если A – счетно, B – бесконечно, то $|A\cup B| = |B|$.
M7. Доказать, что объединение двух континуальных множеств – континуально.
M8*. Доказать, что множество всех **конечных** подмножеств счетного множества счетно.

Подсказки: построить две инъекции; двоичная запись натурального числа.

(Сложно для решения в аудитории) M9*. Доказать, что прямое произведение двух континуальных множеств – континуально.
M10*. Какова мощность множества M, для которого существует отношение вполне упорядоченности R, такое, что R^{-1} тоже отношение вполне упорядоченности?

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Тема: «Комбинаторика»

К1. (Устно) На книжной полке 10 томов.
а) Сколько способов расставить книги так, чтобы 1 и 2 тома были рядом.
б) Сколько способов расставить книги так, чтобы 1 и 10 тома не были рядом.

К2. (Устно) В кафе за круглым столом установлено N стульев. В кафе пришло M посетителей. Найти количество всех различных способов рассадить посетителей, если:
а) N = 10 = M;
б) N = 5, M = 10;
в) N = 10, M = 5.

К3. Пусть $M = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Найти мощность множеств:

A_1 = {Все биекции $M \to M$};

A_2 = {Все всюду определенные инъекции $M \to M$};

A_3 = {Все всюду определенные сюръекции $M \to M$};

A_4 = {Все всюду определенные функции $M \to M$};

A_5 = {Все функции $M \to M$}.

К4. Пусть $M = \{1,2,3,4\}$, $K = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Найти мощность множеств:

A_1 = {Все всюду определенные функции $M \to K$};

A_2 = {Все всюду определенные инъекции $M \to K$};

A_3 = {Все всюду определенные возрастающие функции $M \to K$}.

К5. Доказать свойства биномиальных коэффициентов.

а) $\sum\limits_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2m} = \sum\limits_{m=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} C_n^{2m+1}$;

б) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$; (в лекции)

в) $\sum\limits_{m=0}^{n} mC_n^m = n \cdot 2^{n-1}$.

К6. Найти коэффициент:

а) при $x^5 y^4$ в разложении $(x+y)^9$;

б) при $x^2 y^3 z^4$ в разложении $(x+y+z)^9$;

в) при $x^3 y^6 z^3$ в разложении $(x+2y+3z)^{12}$.

г) при $x^3 y^6 z^{12}$ в разложении $(x+2y^2+4z^3)^{10}$.

К7. Сколько разных слов можно образовать, используя все буквы в слове "комбинаторика", или ″перепрофилирование″ ?

K8
1. Сколько различных коллекций по 10 монет можно составить, используя монеты: копейка, полушка, алтын, денежка, рубль?
2. В ящике находятся 20 красных, 20 зеленых и 20 синих шаров. Сколько разных способов выбрать 10 шаров?

К9. Решить рекуррентные соотношения:
а) $a_0 = 1;\ a_n = -4a_{n-1}$.
б) $a_0 = 2;\ a_1 = 5;\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.
в) $a_0 = 3;\ a_1 = 21;\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$.
г) $a_0 = 1;\ a_1 = 2;\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$.

К10. Найти общее решение рекуррентного соотношения $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$.

К11. Найти сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, используя рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + n^2$.

К12. (Принцип Дирихле)
В комнате сидят 6 человек: любые два – либо друзья, либо враги.
Доказать, что существует тройка взаимных друзей, либо тройка взаимных врагов.

К13. (Числа Стирлинга 2-го рода, треугольник, числа Белла)
Найти количество всех разбиений множества $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

К14. Найти количество всех всюду определенных сюръекций из множества $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ в множество $K = \{1, 2, 3, 4\}$.

К15. Доказать методом математической индукции, что

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m) \cdot f_m(x),$$ где $f_m(x) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-m+1)$, при m > 0, и $f_0(x) \equiv 1$.
(долго)

К16. Доказать, что следующие величины выражаются через числа Каталана:
1) число всех последовательностей длины $2n$: из n открывающих и n закрывающих скобок, где скобки расставлены как в правильных алгебраических выражениях;
2) число всех последовательностей длины $2n$: из n чисел, равных 1, и n чисел, равных −1, где все частичные суммы не отрицательные (т.е. $\sum_{i=1}^{k} a_i \ge 0,\ k \le 2n$);
3) число всех двоичных деревьев с n вершинами;
4) число всех способов провести диагонали в выпуклом n-угольнике, так, чтобы получилось (n-2) треугольника;
5) число всех таблиц Юнга размером $2\times n$. Таблица Юнга – матрица, состоящая из всех чисел 1,…,$2n$, где все строки и все столбцы являются возрастающими наборами чисел.

К17. Найти число всех натуральных чисел, не превосходящих 500, не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15.

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

К18. (слишком легко) Из колоды карт выбираем 7 карт и выкладываем в ряд. Сколько различных способов выборки, где нет трех красных подряд (без учета названия карт).

Тема: «О-символика и асимптотика»

К19. Используя равенство $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, доказать $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + O(k)) = O(n^3)$.

К20. Найти, какая из функций растет быстрее: $n^{\ln n}$ или $(\ln n)^n$. Записать ответ, используя *o* (о малое) и *O* (О большое).

К21. Используя разложение по формуле Тейлора найти оценку $\sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{k}{n}}$ с абсолютной погрешностью $O(n^{-1})$.

К22. Найти оценку $(n+2+O(n^{-1}))^n$ с относительной погрешностью $O(n^{-1})$.

К23. (Формула Стирлинга)
Сравнить скорости роста функций $(\ln(n + 1))!$ и $\ln\ (n + 1)!$

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Тема: «Графы»

Г 1. Перечислить все неизоморфные связные подграфы графа K_5.

Г 2. Нарисовать граф, заданный матрицей смежности. Записать его матрицу инцидентности.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Г 3. Вычислить диаметр, радиус, центры графа из задачи Г 2.

Г 4. Найти вершинную и реберную связность графа из задачи Г 2.

Г 5. Будет ли граф из задачи Г 2 эйлеровым? Будет ли граф гамильтоновым? Будет ли граф планарным; нарисовать соответствующий плоский граф, если он существует.

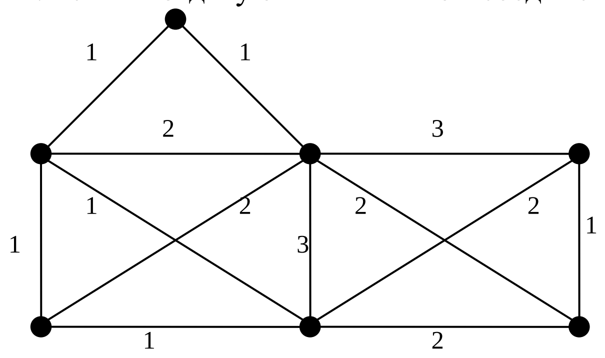
Г 6. Привести примеры четырех графов, $n \geq 6$, связных, двусвязных, реализующих все комбинации:
эйлеров и гамильтонов;
не эйлеров и гамильтонов;
эйлеров и не гамильтонов;
не эйлеров и не гамильтонов.

Г 7. Доказать непланарность графа, заданного списком смежности:

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	7	
3	1	6	8		
4	1	2	5	7	
5	1	2	4	8	
6	1	3	7		
7	2	4	6		
8	3	5			

Г 8. Перечислить все неизоморфные деревья с n вершинами, где
а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$.

Г 9. Решить задачу о минимальном соединении методом Краскала в следующем графе.



Г 10. (Теорема Холла о трансверсали) Решить задачу о назначении при условиях

	каменщик	*плотник*	*электрик*	*слесарь*
К1	+			
К2		+		+
К3	+	+		
К4	+	+		
К5			+	+
К6		+		+ или _

Существует ли решение, если в последней справа ячейке убрать +?

Г 11. Найти хроматическое число графа Петерсона.

Г 12. На многопроцессорном вычислительном комплексе нужно выполнить 7 заданий. В таблице отмечено, какие задания имеют общие данные (следовательно, не могут выполняться одновременно). Для выполнения каждого задания требуется одинаковое время *t*. Найти наименьшее время выполнения всего набора заданий и количество процессоров, необходимых для этого.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1		+			+		+
2	+		+			+	+
3		+		+	+		+
4			+		+	+	+
5	+		+	+		+	+
6		+		+	+		+
7	+	+	+	+	+	+	

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Тема: «Булевы функции»

Ф1. Построить таблицу истинности функции (формулы) $f = x \vee y \vee z \to \overline{(xy \vee xz)}$.
Будет ли функция тождественно истинной?
Будет ли она равносильна функции $g = x \leftrightarrow y$?

Ф2. Привести функцию $f = (x \leftrightarrow y)\ z$ к ДНФ и КНФ.

Ф3. Привести функцию $f = (x \to y)\ (y \to z)$ к СДНФ и СКНФ.

Ф4. Привести функцию $f = xyz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz$ к минимальной ДНФ, используя карту Карно.

Ф5. Найти полином Жегалкина для функции $f = (x \to y) \to z$.
Будет ли функция линейной?

Ф6. Принадлежит ли функция $f = \overline{(x \leftrightarrow \bar{y})}$ основным замкнутым классам?

Ф7. Принадлежит ли функция $f = xy \vee xz \vee yz$ основным замкнутым классам?

Ф8. Доказать полноту класса $K = \{\bar{x},\ x \oplus y,\ x \leftrightarrow yz\}$, используя теорему Поста.
Образует ли K базис класса всех булевых функций?

Ф9. Доказать полноту класса $K = \{x \to y,\ x \oplus y\}$, используя сведение к известным полным классам.

Ф10. Найти количество булевых функций от n переменных в каждом из основных замкнутых классов.

1d0eed6fdeae18b17d4da1b82870804e 03.09.2021

Тема: «Общая алгебра»

А1. Доказать, что операция *, заданная таблицей Кэли ниже, не ассоциативная:

*	a	b	c
a	a	a	c
b	b	b	a
c	c	b	c

А2. Доказать, что операция *, заданная таблицей Кэли ниже, ассоциативная:

*	a	b	c
a	b	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

А3. Найти подполугруппу симметрической полугруппы, изоморфную полугруппе:

а)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

б)

*	a	b	c
a	b	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

А4. Доказать, что операция *, заданная таблицей Кэли ниже, ассоциативная:

*	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

Доказать, что $(\{a, b, c, d\}, *)$ – абелева группа.

А5. Будут ли изоморфны группоиды, заданные таблицами Кэли:

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

А6. Записать таблицу Кэли группы S_3 всех перестановок трехэлементного множества.
Найти все ее подгруппы, нарисовать диаграмму решетки подгрупп.
Является ли эта решетка модулярной?
Является ли эта решетка дистрибутивной?

А7. Найти левый и правый смежные классы группы S_3 по подгруппе $H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

для элемента $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Будет ли подгруппа H нормальной?

А8. Доказать, что группа $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ изоморфна группе Z_4 вычетов по модулю 4.

А9. Найти гомоморфизм группы Z_4 вычетов по модулю 4 в группу Z_2 вычетов по модулю 2. Указать ядро найденного гомоморфизма. Описать фактор группу группы Z_4 по ядру найденного гомоморфизма.

A10. Пусть M – непустое множество. Доказать, что булеан множества M является кольцом относительно операций: $x + y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$ (симметрическая разность) и $x \cdot y = x \cap y$. Будет ли это множество полем?

A11. Доказать, что следующее множество является полем относительно сложения и умножения матриц:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathrm{Q} \right\}.$$

A12. Доказать, что поле из задачи A11 изоморфно полю чисел вида ($a + b\sqrt{2}$), с рациональным a и b, относительно сложения и умножения чисел.

A13. Доказать, что множество **N** является решеткой относительно операций $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$. Нарисовать часть диаграммы решетки.
Является ли эта решетка модулярной?
Является ли эта решетка дистрибутивной?

A14. Нарисовать диаграмму решетки подколец кольца вычетов по модулю n:
а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$; г) $n = 18$.