

**Тема: «Комбинаторика»**

К1. (Устно) На книжной полке 10 томов.

- а) Сколько способов расставить книги так, чтобы 1 и 2 тома были рядом.
- б) Сколько способов расставить книги так, чтобы 1 и 10 тома не были рядом.

К2. (Устно) В кафе за круглым столом установлено  $N$  стульев. В кафе пришло  $M$  посетителей. Найти количество всех различных способов рассадить посетителей, если:

- а)  $N = 10 = M$ ;
- б)  $N = 5, M = 10$ ;
- в)  $N = 10, M = 5$ .

К3. Пусть  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Найти мощность множеств:

$$A_1 = \{\text{Все биекции } M \rightarrow M\};$$

$$A_2 = \{\text{Все всюду определенные инъекции } M \rightarrow M\};$$

$$A_3 = \{\text{Все всюду определенные сюръекции } M \rightarrow M\};$$

$$A_4 = \{\text{Все всюду определенные функции } M \rightarrow M\};$$

$$A_5 = \{\text{Все функции } M \rightarrow M\}.$$

К4. Пусть  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Найти мощность множеств:

$$A_1 = \{\text{Все всюду определенные функции } M \rightarrow K\};$$

$$A_2 = \{\text{Все всюду определенные инъекции } M \rightarrow K\};$$

$$A_3 = \{\text{Все всюду определенные возрастающие функции } M \rightarrow K\}.$$

К5. Доказать свойства биномиальных коэффициентов.

$$\text{а) } \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2m} = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor} C_n^{2m+1};$$

$$\text{б) } \sum_{m=0}^n m C_n^m = n \cdot 2^{n-1}.$$

К6. Найти коэффициент:

а) при  $x^5 y^4$  в разложении  $(x + y)^9$ ;

б) при  $x^2 y^3 z^4$  в разложении  $(x + y + z)^9$ ;

в) при  $x^3 y^6 z^3$  в разложении  $(x + 2y + 3z)^{12}$ .

г) при  $x^3 y^6 z^{12}$  в разложении  $(x + 2y^2 + 4z^3)^{10}$ .

К7. Сколько разных слов можно образовать, используя все буквы в слове "перепрофилирование"?

К8

1. Сколько различных коллекций по 10 монет можно составить, используя монеты: копейка, полushка, алтын, денежка, рубль?

2. В ящике находятся 20 красных, 20 зеленых и 20 синих шаров. Сколько разных способов выбрать 10 шаров?

К9. Решить рекуррентные соотношения:

а)  $a_0 = 1; a_n = -4a_{n-1}$ .

б)  $a_0 = 2; a_1 = 5; a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ .

в)  $a_0 = 3; a_1 = 21; a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ .

г)  $a_0 = 1; a_1 = 2; a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ .

К10. Найти общее решение рекуррентного соотношения  $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ .

К11. Найти сумму  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ , используя рекуррентное соотношение  $a_n = a_{n-1} + n^2$ .