Домашние задания по дискретной математике
Фт-201 (2020/2021 уч.г.)

Тема: «Бинарные отношения»

В1. Исследовать отношения R на M = {-4,-3,-2,-1,0,1,2,3}, используя определения.
$R = \{(x, y) \mid xy \geq 0\}$.

В2. Исследовать отношения R на M = {-4,-3,-2,-1,0,1,2,3}, используя определения.
$R = \{(x, y) \mid \; x < y + 2\}$.

В3. Исследовать отношение R на M = $\mathcal{B}$ ({1,2,3}) (т.е. M – булеан трехэлементного множества), $R = \{(x, y) \mid x \cap y = \varnothing\}$.

В4. Исследовать бинарное отношение R, заданное матрицей. Найти R^+.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В5. Исследовать бинарное отношение R, заданное матрицей. Найти R^+.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В6. Доказать, что $R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^{n-1}$, если R задано на конечном множестве M, и $|M| = n$.

В7.
а) Привести пример отношения, симметричного и антисимметричного одновременно.
б) Найти количество всех отношений на M = {1, 2, 3}, симметричных и антисимметричных одновременно.

B8. Доказать, что бинарное отношение R на M является отношением частичного порядка и нарисовать диаграмму.

M $=\{2,4,6,8,\ ...,16\}$, $R=\{(x,y)\mid \dfrac{y}{x}-\text{целое}\}$.

B9. Доказать, что бинарное отношение R, заданное матрицей, является отношением частичного порядка, нарисовать диаграмму.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

B10. Нарисовать диаграмму прямого произведения ч.у.м. A = ($\mathcal{B}$({1,2}), $\subseteq$) и B = ({3,4,5}, $\le$) (т.е. отношение сравнения чисел). Указать наименьший, наибольший, минимальный, максимальный элементы.

B11. Доказать, что бинарное отношение R, заданное матрицей, является отношением эквивалентности, построить разбиение.

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B12. Перечислить все попарно неизоморфные ч.у.м на четырехэлементном множестве.

Тема: «Комбинаторика»

K1. Пусть $M = \{a, b, c, d, e\}$, $K = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$.
Найти мощность множеств:

A_1 = {Все всюду определенные функции $M\to K$};

A_2 = {Все всюду определенные инъекции $M\to K$};

A_3 = {Все функции $M\to K$}.

K2. Возле стойки в баре установлено N стульев. В бар пришло M посетителей. Найти количество всех различных способов рассадить посетителей, если:
а) N = 12 = M;
б) N = 9, M = 12;
в) N = 12, M = 9.

K3.

1. Найти коэффициент при $x^{10}y^7$ в разложении $(x+y)^{17}$.

2. Найти коэффициент при $w^3x^2y^5z^7$ в разложении $(w+x+y+z)^{17}$.

3. Найти коэффициент при $w^{10}x^{12}y^4z^3$ в разложении $(4w^5+2x^3+y^2+5z)^{11}$.

K4. Сколько разных слов можно образовать, используя все буквы в слове "программирование"?

K5. Сколько различных букетов из 7 цветков можно сделать, используя 5 видов цветов?

K6. Решить рекуррентные соотношения:
а) $a_0 = 1;\ a_n = 6a_{n-1}$.
б) $a_0 = 2;\ a_1 = 4;\ a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$.
в) $a_0 = 2;\ a_1 = 6;\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$.
г) $a_0 = 3;\ a_1 = 4;\ a_n = -4a_{n-2}$.

K7. Найти общее решение рекуррентного соотношения
$a_n = a_{n-4}$.

K8. Найти сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, используя рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + n^3$.

K9. Доказать, что в любой компании из 30 человек существуют двое, имеющие одинаковое количество взаимных друзей.

K10. Найти количество всех всюду определенных сюръекций из множества $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ в множество $K = \{1, 2, 3\}$.

K11. Найти количество способов разделить группу из 5 человек на две команды для игры в пейнтбол (команды не пустые, количество людей в командах не обязательно одинаковое).

K12. Доказать методом математической индукции, что
$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m) \cdot f_m(x)$, где $f_m(x) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-m+1)$, при m > 0, и
$f_0(x) = 1$.

K13. Доказать, что следующие величины выражаются через числа Каталана:
1) число всех последовательностей длины $2n$: из n открывающих и n закрывающих скобок, где скобки расставлены как в правильных алгебраических выражениях;
2) число всех последовательностей длины $2n$: из n чисел, равных 1, и n чисел, равных −1, где все частичные суммы не отрицательные (т.е. $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0,\ k \leq 2n$);
3) число всех двоичных деревьев с n вершинами;
4) число всех способов провести диагонали в выпуклом n-угольнике, так, чтобы получилось (n-2) треугольника;
5) число всех таблиц Юнга размером $2 \times n$. Таблица Юнга – матрица, состоящая из всех чисел 1,…,$2n$, где все строки и все столбцы являются возрастающими наборами чисел.

K14. Найти число всех натуральных чисел, меньших 330, взаимно простых с ним.
K15. В студенческой группе 6 человек. Список вопросов к экзамену содержит 6 пунктов, один билет содержит один вопрос из списка. Студенты распределили все вопросы, так, что каждый студент выучил ровно один вопрос. Сколько разных вариантов так выдать билеты на экзамене, что вся группа получит «неудовлетворительно»?

dzdm_ft2020_2020_09_23_07_53_01_460 23.09.2020

Тема: «Графы»

Г 1. Перечислить все неизоморфные связные подграфы графа $K_{3,3}$.

Г 2. Нарисовать граф, заданный матрицей смежности. Вычислить диаметр, радиус, центры графа. Будет ли граф эйлеровым, гамильтоновым? Записать эйлеров и гамильтонов циклы, если они существуют. Будет ли граф планарным?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Г 3. Найти количество всех неизоморфных деревьев с 7 вершинами.

Г 4. Решить задачу о минимальном соединении методом Краскала в графе Петерсона, где вершины имеют номера от 1 до 10, стоимость каждого ребра (u,v) равна остатку от деления на 4 суммы (u + v).

Г 5. В учебном центре имеются три аудитории, каждая вмещает только одну группу, для занятий по физике и химии оборудована только одна аудитория. В таблице отмечено, какие занятия нужно провести в группах 101, 102, 103, и какие преподаватели (А, Б, В) могут это сделать. Каждое занятие проводится в течение одинакового времени (90 минут). Составить расписание для всех занятий в течение одного рабочего дня (8 часов), если оно существует.

	101	102	103	А	Б	В
Математика	+	+		+		
Физика	+		+	+		
Химия	+	+			+	
Иностранный язык		+	+			+
История	+		+			+

Г 6. Найти хроматическое число графа, заданного матрицей смежности.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тема: «Общая алгебра»

А1. Является ли коммутативной, ассоциативной, операция *, заданная таблицей Кэли:

*	**a**	**b**	**c**	**d**
a	*a*	*c*	*b*	*d*
b	*c*	*d*	*a*	*b*
c	*b*	*a*	*d*	*c*
d	*d*	*b*	*c*	*a*

Является ли $(\{a, b, c, d\}, *)$ – абелевой группой?

А2. Будут ли изоморфны группоиды, заданные таблицами Кэли:

	a	**b**	**c**	**d**
a	*b*	*c*	*d*	*a*
b	*c*	*d*	*a*	*b*
c	*d*	*a*	*b*	*c*
d	*a*	*b*	*c*	*d*

	a	**b**	**c**	**d**
a	*b*	*d*	*a*	*d*
b	*d*	*a*	*b*	*c*
c	*a*	*b*	*c*	*d*
d	*c*	*c*	*d*	*b*

А3. Пусть $G = < a >$ – циклическая группа порядка 18. Записать таблицу Кэли ее групповой операции. Найти для G все подгруппы, нарисовать диаграмму решетки подгрупп.
Является ли эта решетка модулярной?
Является ли эта решетка дистрибутивной?

А4. Для группы G из задачи А3 будет ли нормальной подгруппа $H = < a^6 >$?

А5*. Найти сюръективный гомоморфизм группы G из задачи А3 в группу Z_3 вычетов по модулю 3. Указать ядро найденного гомоморфизма. Описать фактор группу группы G по ядру найденного гомоморфизма.

Тема: «Булевы функции»

F1. Будут ли равносильны функции $f = (x \to y) \Leftrightarrow (x \vee z \to y \vee z)$ и $g = x \vee y$?

F2. Привести функцию $f = \overline{(xy \to x)}$ к ДНФ и КНФ.

F3. Привести функцию $f = \overline{(x \vee y)}\,(x \to z)$ к СДНФ и СКНФ.

F4. Привести функцию $f = ((x \to y) \to z) \to w$ к минимальной ДНФ, используя карту Карно.

F5. Найти полином Жегалкина для функции $f = xy \vee xz \vee yz$.
F6. Проверить полноту классов, используя теорему Поста:
$K_1 = \{1, \bar{x}, x + y + \max(x, y, z)\}$;
$K_2 = \{0, 1, xy \vee z\}$;
$K_3 = \{\bar{x}, (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)\}$.

F7. Доказать полноту классов $K_1 = \{x \downarrow y\}$ и $K_2 = \{x \leftrightarrow y, x \vee y, 0\}$, используя сведение к известным полным классам.

F8. Найти количество булевых функций от n переменных в каждом из основных замкнутых классов, кроме класса М.

Ответы.

В1. R рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

В2. R рефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

В3. R не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

В4. R рефлексивно, не симметрично, антисимметрично, не транзитивно.

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

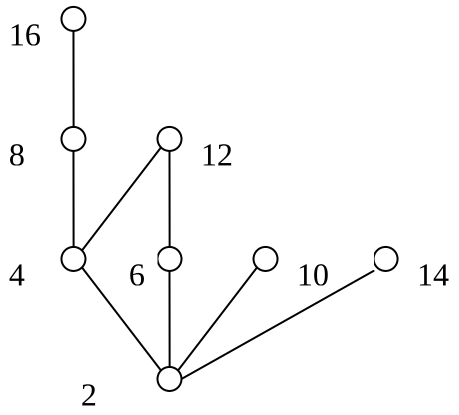
В5. R не рефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно.

$$R^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

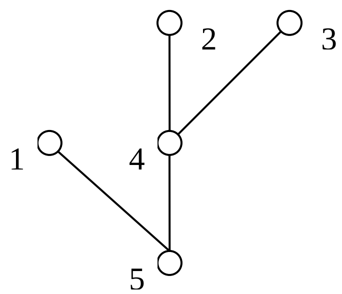
В7. б) $2^3 = 8$.

dzdm_ft2020_2020_09_23_07_53_01_460 23.09.2020

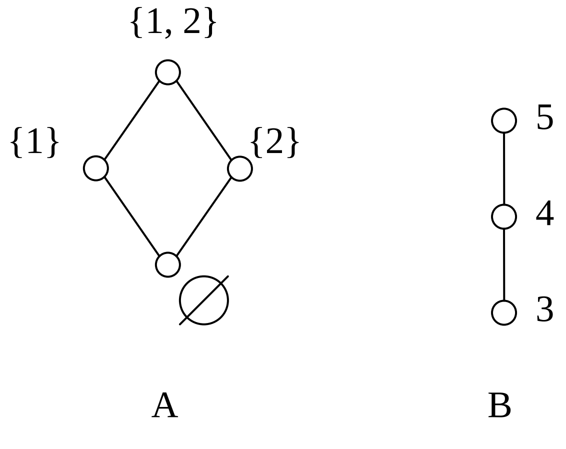
B8. *R* рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

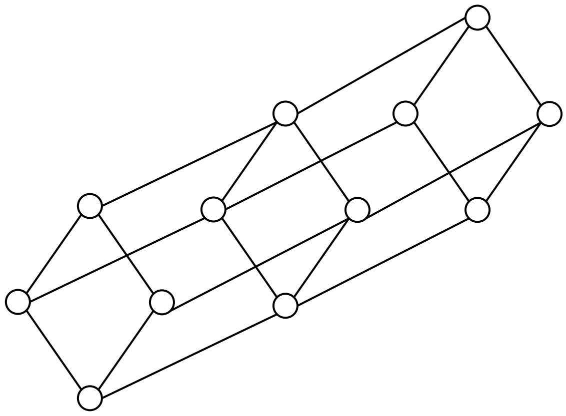


B9. *R* рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.



B10.





A $\times$ B

Наименьший – $(\varnothing, 3)$;
наибольший – $(\{1, 2\}, 5)$;
минимальный – $(\varnothing, 3)$;
максимальный – $(\{1, 2\}, 5)$.

B11. R рефлексивно, симметрично, транзитивно.
Разбиение: $\{K_1 = \{1,5\}, K_2 = \{2,4\}, K_3 = \{3\}\}$.

K1. $|A_1| = 8^5$; $|A_2| = A_8^5 = \dfrac{8!}{3!}$; $|A_3| = C_8^5 = \dfrac{8!}{5!\,3!}$.

K2. а) $P_{12} = 12\,!$.

K2. б) $A_{12}^9 = \dfrac{12\,!}{3\,!}$.

K2. в) $A_{12}^9 = \dfrac{12\,!}{3\,!}$.

K3.1. $C_{17}^{10} = \dfrac{17!}{10!\,7!}$.

K3.2. $P_{17}(3,2,5,7) = \dfrac{17!}{3!\,2!\,5!\,7!}$.

K3.3. $4^2 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot P_{11}(2,4,2,3) = 4^2 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot \dfrac{11!}{2!\,4!\,2!\,3!}$.

K4. $\dfrac{16!}{3!\,(2!)^4}$.

K5. $C_{7+5-1}^{7} = \dfrac{11!}{7!\,4!}$.

K6. а) $a_n = 6^n$.

K6. б) $a_n = 4 \cdot 3^n + (-2) \cdot 4^n$.

K6. в) $a_n = 2 \cdot 2^n + 1 \cdot n \cdot 2^n$.

K6. г) $a_n = 3 \cdot 2^n \cos\dfrac{\pi n}{2} + 2 \cdot 2^n \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

K7. $a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot (-1)^n + C_3 \cdot 1^n \cdot \cos\dfrac{\pi n}{2} + C_4 \cdot 1^n \cdot \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

K8. $0 \cdot 1^n + n\left(\dfrac{1}{4}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{4}n\right) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

K10. $3! \cdot S(7,3) = 6 \cdot 301$.

K11. $S(5,2) = 15$.