Дискретная математика и математическая логика

Щербакова Валентина Александровна

"Интеллектуальные системы в гуманитарной сфере" 2 курс

осенний семестр –

Глава I. Множества, бинарные отношения, мощность множеств.

§1. Множества, булевы операции, свойства булевых операций.

Опр. Множество – набор каких-то объектов.

Элемент множества – каждый объект.

Множество содержит элемент: $a \in A$.

Элемент принадлежит множеству: $a \in A$.

$\mathbf{A} \ni a$

$\notin$

Множества чисел:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных (вещественных) чисел;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел.

Опр. Пустое множество – множество, в котором нет ни одного элемента.

$\varnothing$

Опр. Множество называется конечным, если оно пустое или количество элементов в нем можно сосчитать.

Множество называется бесконечным – в противном случае, т.е. элементов в нем больше любого названного числа.

Опр. Мощность множества (на интуитивном уровне) – количество элементов в нем.

$|A|$

$|\varnothing| = 0$;

$|A| = n$, натуральное число, если A конечное и не пустое;

$|A| = \infty$, если A бесконечное;

$|A| < \infty$, если A конечное.

Способы задания множества:

1. Перечисление элементов

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

2. Указание свойства элементов

$$A = \left\{ a \mid \text{ описание свойства } a \right\}$$

Опр. Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. любой элемент множества A принадлежит B, и наоборот.

$$A = B$$

Опр. Множество A является подмножеством множества B, если любой элемент множества A принадлежит B.

$$A \subseteq B$$

$$B \supseteq A$$

Теорема.

$A = B \iff A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Опр. Булеан множества A – множество всех подмножеств множества A.

$\mathcal{B}(A)$

$\mathcal{B}(A) = \{\, B \mid B \subseteq A \,\}$

Свойство булеана:

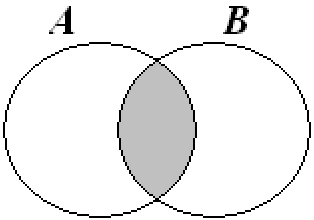
Если A конечное, то $|\mathcal{B}(A)| = 2^{|A|}$.

2^A – обозначение для булеана.

Опр. Пересечение множеств A и B – множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих A и B одновременно.

$A \cap B$

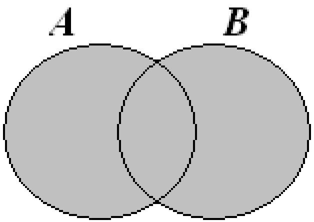
$$A \cap B = \left\{ a \;\middle|\; a \in A,\ a \in B \right\}$$



Опр. Объединение множеств A и B – множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или A, или B, или A и B одновременно (принадлежащих A или B).

$A \cup B$

$$A \cup B = \left\{ a \mid a \in A \text{ или } a \in B \right\}$$



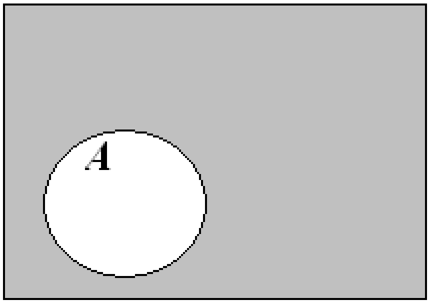
Опр. Универсальное множество для системы множеств – множество, содержащее все элементы этих множеств.

$\boldsymbol{I}$

Опр. Дополнение к множеству A – множество, состоящее из всех элементов универсального множества, не принадлежащих A.

$\overline{A}$

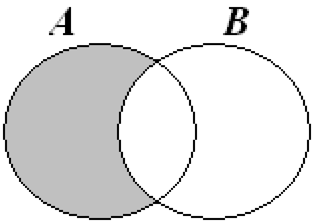
$$\overline{A} = \left\{ a \middle| \ a \in I,\ a \notin A \right\}$$



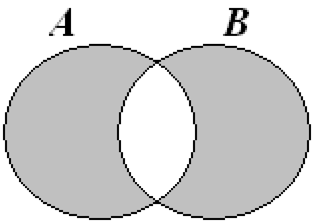
Опр. Разность множеств A и B – множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B.

$A \setminus B$

$$A \setminus B = \left\{ a \;\middle|\; a \in A,\ a \notin B \right\}$$



Симметрическая разность множеств



Очевидно, ее можно выразить как $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Свойства булевых операций:

1), 2) Идемпотентность

$A \cap A = A$;

$A \cup A = A$.

Замечание: $a \cdot a = a^2$; $a^2 = a$.

3), 4) Коммутативность

$A \cap B = B \cap A$;

$A \cup B = B \cup A$.

5), 6) Ассоциативность

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

7), 8) Дистрибутивность

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

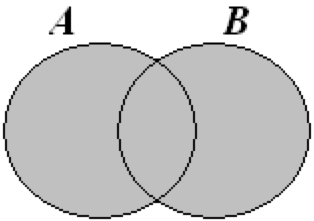
$$\boxed{a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)}$$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

9), 10) Законы поглощения

$A \cap (A \cup B) = A;$

Иллюстрация закона поглощения:



$A \cup (A \cap B) = A.$

11), 12)

$A \cap \overline{A} = \varnothing$ закон противоречия;

$A \cup \overline{A} = I$ закон «исключенного третьего».

13), 14) Законы де Моргана

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \,;$$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \,.$$

15), 16) Почти дистрибутивность разности слева (знак меняется)

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

17), 18) Дистрибутивность разности справа (знак не меняется)

$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

19) Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

20) Выражение разности через другие операции

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Теорема.

Если множества A и B конечные, то

(1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

(2) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$;

(3) $|A \setminus B| \leq |A|$.

(4) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.