§2. Прямое (декартово) произведение множеств. Бинарные отношения

Опр. Упорядоченная пара $(a, b) = ?$

Опр. Упорядоченная пара $(a, b) = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$.

Первая компонента – a.
Вторая компонента – b.

Утверждение.
$(a, b) = (c, d) \iff a = c, \ b = d.$

Опр. Прямое произведение множеств A и B – множество всех упорядоченных пар, в которых первая компонента принадлежит A, а вторая компонента принадлежит B.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

Свойства:

1. Не коммутативно, т.е.
$A \times B \neq B \times A$.

2. Не ассоциативно, т.е.
$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

3. Дистрибутивно относительно пересечения и объединения
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;
$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

4. Если A и B конечные, то
$|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Опр. Упорядоченная тройка $(a, b, c) = ((a, b), c)$.

Первая компонента – a.
Вторая компонента – b.
Третья компонента – c.

Опр. Прямое произведение множеств A, B и C – множество всех упорядоченных троек, в которых первая компонента принадлежит A, вторая компонента принадлежит B, третья компонента принадлежит C.

$$A \times B \times C = \{ (a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B, c \in C \}.$$

Опр. Кортеж длины n (для $n > 2$)

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = ((a_1, ..., a_{n-1}), a_n).$$

Опр. Прямое произведение множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ – множество всех кортежей, в которых каждая i-я компонента принадлежит A_i.

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \left\{ (a_1, a_2, ..., a_n) \middle| \; a_i \in A_i \right\}.$$

Опр. Декартова степень множества

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}.$$

Примеры:

1) R^2 – множество точек плоскости;

2) R^3 – множество точек пространства.

Опр. Бинарное отношение R между A и B – подмножество декартова произведения A и B.

$$R \subseteq A \times B.$$

Опр. Бинарное отношение R на A – подмножество декартова квадрата A.

$$R \subseteq A^2.$$

Опр. Пустое отношение – пустое подмножество.

Опр. Универсальное отношение – подмножество всех пар, т.е. $A \times B$ или A^2.

Опр. Отношение равенства на A (диагональ)
$\Delta = \{ (a, a) \mid a \in A \}$.

Способы задания отношения:

1. Множество пар
$$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}.$$

2. Определяющее свойство
$$R = \{(a, b) \mid \text{ свойство } a \text{ и } b\}.$$

3. Матрица отношения (для конечных A и B)

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hspace{8cm}}^{B}} \\
 & & \cdots & b_j & \cdots \\
\hline
 & \vdots & & & \\
A\left\{\rule{0pt}{3em}\right. & a_i & & \begin{cases} 1, \text{ если } (a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases} & \\
 & \vdots & & &
\end{array}
$$

Пример: матрица отношения равенства на множестве $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

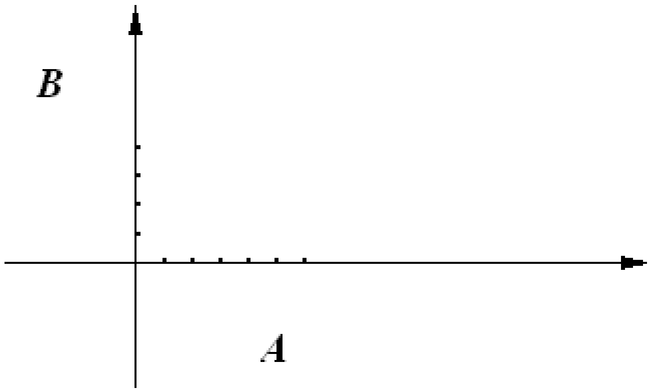
	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Убрав заголовки строк и столбцов таблицы получаем матрицу

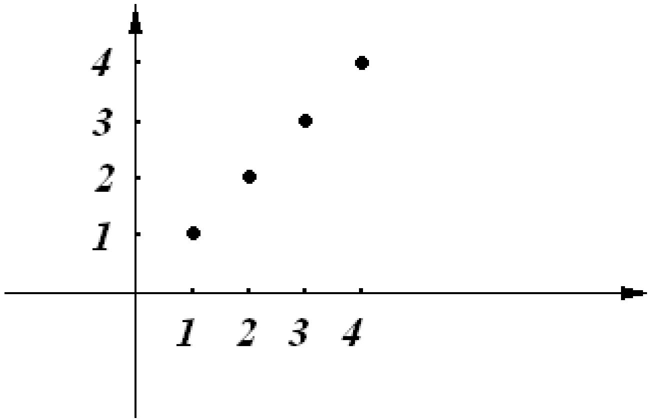
$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. График отношения



Если $(a_i, b_j) \in R$, то на графике рисуют точку с координатами (a_i, b_j).

Пример: график отношения равенства на множестве $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$



Пусть R бинарное отношение на A.

Опр. Отношение R рефлексивное, если $\forall x \in A \rightarrow (x, x) \in R$.

Опр. Отношение R симметричное, если
$\forall x, y \in A$: $(x, y) \in R \to (y, x) \in R$.

Опр. Отношение R антисимметричное, если
$\forall x, y \in A$: $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R \rightarrow x = y$.

Опр. Отношение R транзитивное, если
$\forall x, y, z \in A$: $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R \to (x, z) \in R$.

Признаки свойств отношений, заданных матрицей

1. Рефлексивность: главная диагональ вся состоит из единиц.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Симметричность: матрица симметрична относительно главной диагонали.

$$R = \begin{pmatrix} \ddots & & * & \\ & \ddots & & \\ * & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

3. Антисимметричность: на симметричных местах запрещаются две единицы (кроме диагонали).

$$R = \begin{pmatrix} \ddots & & * & \\ & \ddots & & \\ \circ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$