§3. Операции над бинарными отношениями

Пусть все отношения на A.

Теоретико-множественные операции:

пересечение;	$P \cap Q$	
объединение;	$P \cup Q$	
дополнение;	$\overline{P}$	где $I = A^2$
разность.	$P \setminus Q$	

Опр. Обратное к P отношение

$$P^{-1} = \left\{ (b,a) \middle| \ (a,b) \in P \right\}.$$

Опр. Произведение отношений P и Q

$$P \cdot Q = \left\{ (a,b) \middle|\ \exists t \in A \colon (a,t) \in P,\ (t,b) \in Q \right\}.$$

Опр. Степень отношения P

$$P^n = \underbrace{P \cdot P \cdot \ldots \cdot P}_{n}.$$

Опр. Рефлексивное замыкание отношения P

$P \cup \Delta$.

Опр. Транзитивное замыкание отношения P

$$P^{+} = \left\{(a,b) \middle|\ \exists t_1, t_2, \ldots, t_n : t_1 = a,\, t_n = b,\, (t_i, t_{i+1}) \in P \right\}.$$

Опр. Рефлексивно-транзитивное замыкание отношения P

$$P^{*} = \left(P \cup \Delta\right)^{+} = P^{+} \cup \Delta.$$

Теорема.

(1) $P^{+} = P \cup P^{2} \cup P^{3} \cup \ldots$.

(2) $P^{*} = P^{0} \cup P \cup P^{2} \cup P^{3} \cup \ldots$, где $P^{0} = \Delta$.

Выполнение операций с отношениями, заданными матрицами.
Пусть $P = \left(p_{ij}\right)$, $Q = \left(q_{ij}\right)$.

1. Пересечение
$P \cap Q = \left(p_{ij} \cdot q_{ij}\right)$.

2. Объединение
$P \cup Q = \left(p_{ij} \vee q_{ij}\right)$, где

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

3. Дополнение

$\overline{P} = \left(\neg p_{ij}\right)$, где

p	0	1
$\neg p$	1	0

4. Разность

$P \setminus Q = \left(p_{ij} \setminus q_{ij}\right)$, где

	q		
	$p \setminus q$	0	1
p	0	0	0
	1	1	0

5. Обращение

$$P^{-1} = \left(p_{ji}\right) = P^{\mathrm{T}} \, .$$

6. Произведение

$P \cdot Q = \left(r_{ij}\right)$, где $r_{ij} = \bigvee\limits_{l=1}^{n} \left(p_{il} \cdot q_{lj}\right)$ – результат умножения i-ой строки матрицы P на j-ый столбец матрицы Q.

7. Транзитивное замыкание

$P^{+} = P \cup P^{2} \cup P^{3} \cup \ldots \cup P^{n}$, где $n = |A|$.

8. Рефлексивно-транзитивное замыкание

$P^{*} = P^{0} \cup P \cup P^{2} \cup P^{3} \cup \ldots \cup P^{n-1}$, где $n = |A|$.

Теорема.
(1) Отношение R рефлексивно $\Leftrightarrow$ $\Delta \subseteq R$.
(2) Отношение R симметрично $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$.
(3) Отношение R антисимметрично $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$.
(4) Отношение R транзитивно $\Leftrightarrow$ $R^2 \subseteq R$.

§4. Отношение эквивалентности. Фактор-множество

Опр. Отношение R на A называется отношением эквивалентности, если R рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Опр. Разбиение множества A – система $A_1, A_2, \ldots$ непустых подмножеств множества A, такое, что:

1) $\bigcup\limits_i A_i = A$;

2) если $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, то $A_i = A_j$.

Классы разбиения, или классы эквивалентности – множества $A_1, A_2, \ldots$.

Утверждение.

Пусть $A_1, A_2, \dots$ – разбиение множества A. Тогда отношение $R = \left\{ (x, y) \middle| \ \exists A_i : x \in A_i,\ y \in A_i \right\}$ является отношением эквивалентности.

Доказательство:

1. R рефлексивно, т.к. любой элемент x множества A принадлежит какому-нибудь A_i, следовательно $(x, x) \in R$.

2. R симметрично, т.к. если $\exists A_i : x \in A_i,\ y \in A_i$, то $\exists A_i : y \in A_i,\ x \in A_i$.

3. R транзитивно, т.к. если $\exists A_i : x \in A_i,\ y \in A_i$, и $\exists A_j : y \in A_j,\ z \in A_j$, то $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Следовательно $A_i = A_j$, тогда $\exists A_i : x \in A_i,\ z \in A_i$.

Теорема.
Любое отношение эквивалентности определяется подходящим разбиением.

Доказательство (содержит алгоритм поиска подходящего разбиения):
Пусть R – отношение эквивалентности на $A = \{a, b, c, \ldots\}$.

Для любого t определим $A_t = \left\{ x \middle| \ x \in A, \ (t, x) \in R \right\}$.

Получим систему $A_a, A_b, A_c, \ldots$ непустых подмножеств множества A.
Покажем, что она является разбиением множества A.

Заметим, что для любого t выполняется $t \in A_t$.

$A_a \cup A_b \cup A_c \cup \ldots = A$, это условие 1) из определения разбиения.

Пусть $A_a \cap A_b \neq \varnothing$. Тогда существует $d \in A_a \cap A_b$.

$\forall x \in A_a \Rightarrow (a, x) \in R,\ (a, d) \in R,\ (d, a) \in R$

$\Rightarrow (d, x) \in R,\ (b, d) \in R$

$\Rightarrow (b, x) \in R$, т.е. $x \in A_b$. Это значит $A_a \subseteq A_b$.

Обратное включение $A_b \subseteq A_a$ доказывается аналогично.

Т.е. $A_a = A_b$. Это условие 2).

Вывод: понятия «разбиение» совпадает с понятием «отношение эквивалентности».

Опр. Фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности R называется множество всех классов эквивалентности.

Обозначение: A/R.

Пример.
$A = \mathbf{N}$;

$$R = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{остаток от деления } x \text{ на } 3 \text{ равен} \\ \text{остатку от деления } y \text{ на } 3 \end{array} \right\}.$$

$A/R = ?$

$A/R = \{K_1, K_2, K_3\}$, где

$K_1 = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$, $K_2 = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$, $K_3 = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$.