## §6. Отображения (функции)

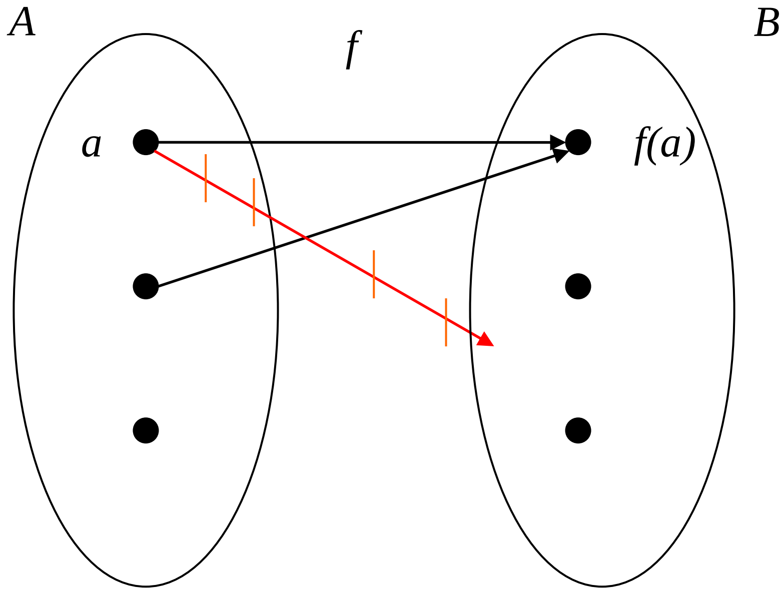
Опр. Отображением из $A$ в $B$ называется бинарное отношение $f$ между $A$ и $B$, такое, что из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $a_1 = a_2$ следует, что $b_1 = b_2$. («Однозначность»)

$f: A \to B$

Опр. Образ элемента $a$ – элемент $b$, такой, что $(a,b) \in f$ .

$f(a)$

Опр. Прообраз элемента $b$ – элемент $a$, такой, что $(a,b) \in f$ .


A
f
B
a
f(a)

Опр. Область определения отображения $f$

$$d(f) = \{a \mid \exists f(a)\}.$$

Опр. Область значений отображения $f$

$$i(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A\colon f(a) = b\}.$$

Опр. Пусть $A' \subseteq A$. Образ множества $A'$ –

$$f(A') = \{ f(a) \mid a \in A' \}.$$

Опр. Пусть $B' \subseteq B$. Полный прообраз множества $B'$ –

$$f^{-1}(B') = \{ a \mid \exists b \in B' : f(a) = b \}.$$

Замечание:

$$d(f) = f^{-1}(B);$$

$$i(f) = f(A).$$

Операции с отображениями: суперпозиция и обращение.

Опр. Пусть $f:\ A \to B$, $g:\ B \to C$. Суперпозицией отображений называется их произведение как бинарных отношений, т.е.
$$f * g = \{(a,b) \mid \exists t \in B : (a,t) \in f,\ (t,b) \in g\}.$$

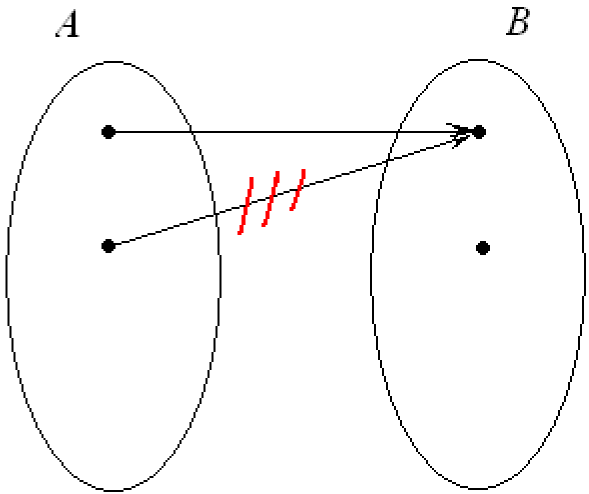
Замечание:
$$(f * g)(a) = g(f(a)).$$

Опр. Тождественным отображением на $A$ называется $e_A : A \to A$, такое, что для любого $x \in A$ выполняется $e_A(x) = x$.

Опр. Пусть $f: A \to B$. Обратное отображение к $f$ –
$f^{-1}: i(f) \to A$, такое, что $f * f^{-1} = e_{d(f)}$.

Замечание: обратное отображение может не существовать.

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$.
(«Обратная однозначность»)



Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$. («Обратная однозначность»)

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется всюду определенным, если $d(f) = A$.

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$.
(«Обратная однозначность»)

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется всюду определенным, если $d(f) = A$.

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется сюръективным, если $i(f) = B$.

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется инъективным, если из условия $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, $b_1 = b_2$ следует, что $a_1 = a_2$. («Обратная однозначность»)

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется всюду определенным, если $d(f) = A$.

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется сюръективным, если $i(f) = B$.

Опр. Отображение $f$ из $A$ в $B$ называется биективным, если оно инъективное, всюду определенное и сюръективное.

Инъекция, сюръекция, биекция.

Теорема.
(1) Суперпозиция инъективных отображений – инъективно.
(2) Суперпозиция всюду определенных отображений – всюду определенное.
(3) Суперпозиция сюръективных отображений – сюръективно.
(4) Суперпозиция биективных отображений – биективно.

Теорема.
Обратное отображение к $f$ существует $\Leftrightarrow$ $f$ инъективно.

Следствие.
Если $f$ – биекция, то $f^{-1}$ – тоже биекция.