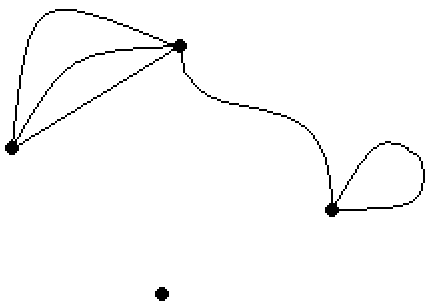
Глава III. Графы

§1. Основные определения

Опр. (как рисунок)
Графом называется рисунок, состоящий из точек, соединенных линиями.

Вершина графа – каждая точка.
Ребро графа – каждая линия, соединяющая две вершины.



Опр. Кратные ребра – ребра, соединяющие одинаковую пару вершин.

Опр. Петля – ребро, соединяющее вершину с самой собой.

Опр. Обыкновенный граф – граф без петель и кратных ребер.

Опр. (как алгебраическая структура)
Графом называется пара (V, E), где V – множество вершин, E – множество ребер, т.е. если $e \in E$, то $e = (u, v) \in V \times V$, причем $(u, v) = (v, u)$.

Неориентированный граф.

Опр. Две вершины u и v называются смежными, если существует ребро (u, v), их соединяющее.

Опр. Два ребра называются смежными, если существует общая вершина в составе ребер.

Опр. Вершина инцидентна ребру, если ребро соединяет эту вершину с какой-нибудь вершиной.

Опр. Степенью вершины u называется число $\rho(u)$, равное количеству ребер, инцидентных u.

Опр. Изолированной вершиной называется вершина степени 0.

Опр. Регулярным графом называется граф, в котором степени всех вершин одинаковы.

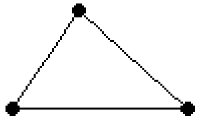
Опр. Полным графом на n вершинах называется обыкновенный граф, в котором любые две вершины смежные.

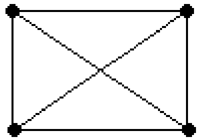
K_n

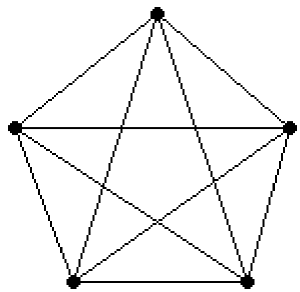
Примеры:

1) $n = 1$, изолированная вершина; K_1

2) $n = 2$, ребро K_2

3) $n = 3$, треугольник; K_3 

4) $n = 4$, K_4 

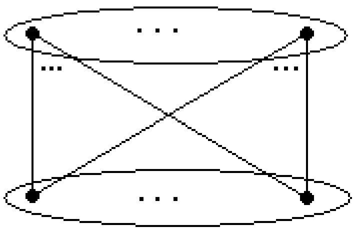
5) $n = 5$, K_5 

Замечание:

В полном графе K_n количество ребер $m = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$.

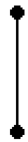
Опр. Полным двудольным графом называется обыкновенный граф, в котором вершины поделены на две части (доли), и каждая вершина одной доли смежна всем вершинам второй доли.

K_{n_1, n_2}

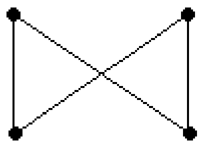


Примеры:

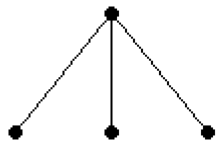
1) $K_{1,1}$,   ребро;



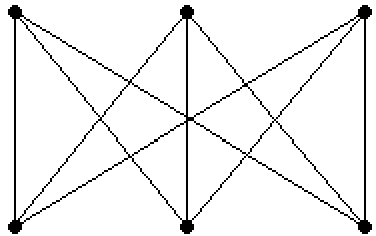
2) $K_{2,2}$,



3) $K_{1,3}$, 3-лапа;



4) $K_{3,3}$,



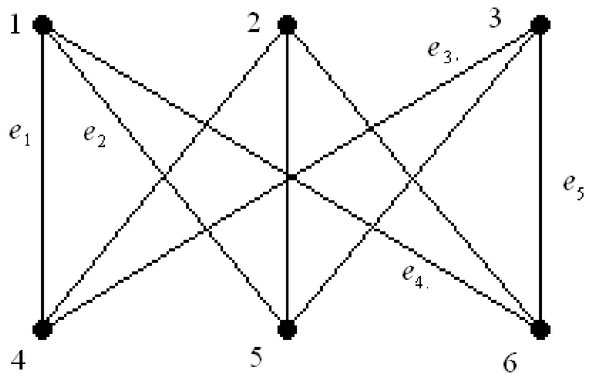
Замечание:

В полном двудольном графе K_{n_1,n_2} количество ребер $m = n_1 \cdot n_2$.

Опр. Маршрутом в графе называется последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k$, в которой любые соседние вершина и ребро инцидентны друг другу.

Пример.

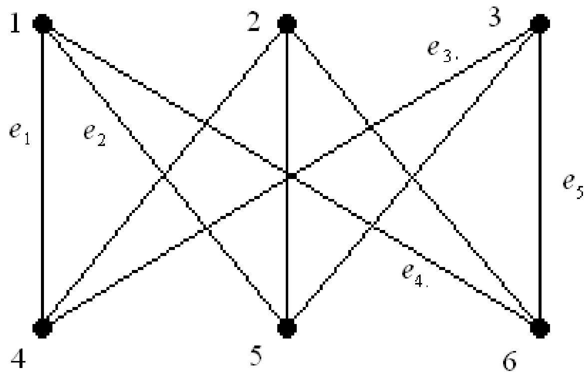
$1, e_1, 4, e_1, 1, e_2, 5$ – маршрут в графе



Опр. Цепью в графе называется маршрут, в котором все ребра различны.

Пример.

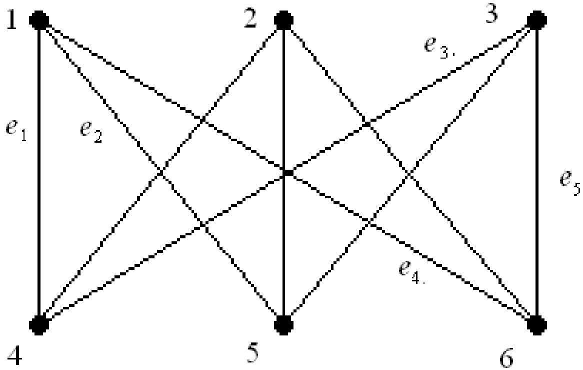
$1, e_1, 4, e_3, 3, e_5, 6, e_4, 1, e_2, 5$ – цепь в графе



Опр. Простой цепью в графе называется цепь, в которой все вершины различны.

Пример.

$1, e_1, 4, e_3, 3, e_5, 6$ – простая цепь в графе

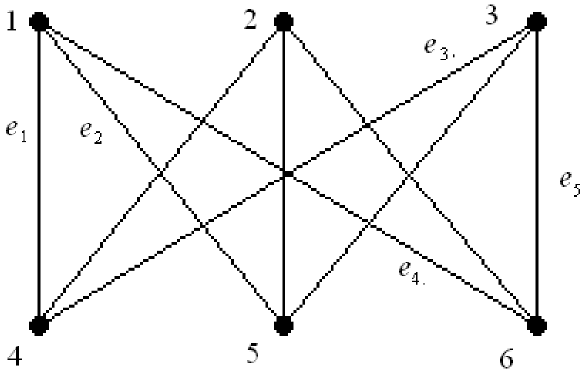


Опр. Циклом называется цепь $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_1$, в которой первая и последняя вершины совпадают, и количество ребер больше нуля.

Опр. Простым циклом в графе называется цикл, в котором все вершины различны (кроме совпадающих первой и последней вершин).

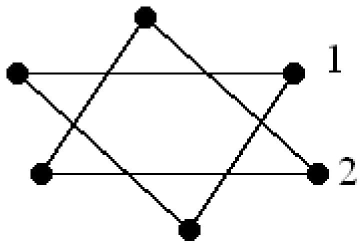
Пример.

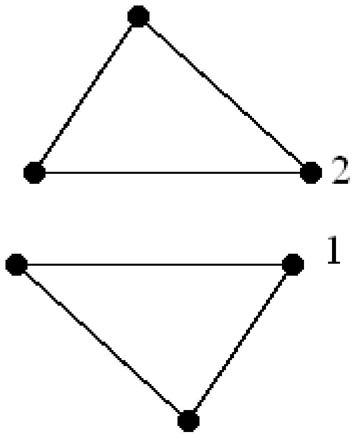
$1, e_1, 4, e_3, 3, e_5, 6, e_4, 1$ – простой цикл в графе



Опр. Граф называется связным, если для любой пары вершин u и v существует маршрут, их соединяющий (($u - v$)-маршрут).

Пример.
Не связный граф:





Опр. Компонентой связности называется максимальная по включению часть графа, являющаяся связным графом.

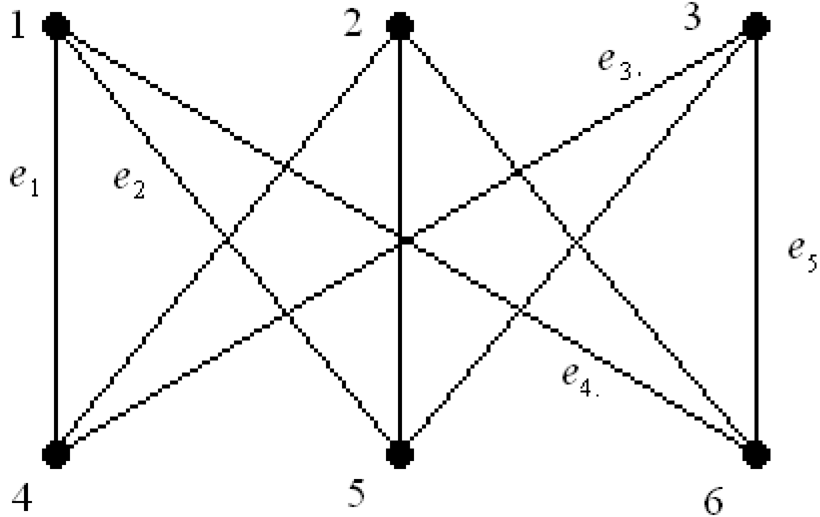
Пример.
Две компоненты связности.

Опр. Подграфом графа (V, E) называется граф (V', E') , где $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.

Опр. Суграфом графа (V, E) называется подграф (V, E'), содержащий все вершины исходного графа.

Опр. Подграфом, порожденным множеством вершин V' называется подграф (V', E'), такой, что $e \in E'$ всякий раз, когда $e \in E$ и $e \in V' \times V'$.

Пример.



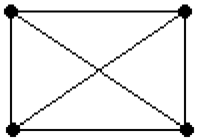
$(\{1,4,5\},\{e_2\})$ – подграф;

$(\{1,2,3,4,5,6\},\{e_2\})$ – суграф;

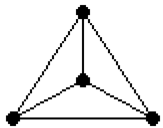
$(\{1,4,5\},\{e_1,e_2\})$ – подграф, порожденный множеством вершин $\{1,4,5\}$.

Опр. Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если существует биекция $\delta : V_1 \to V_2$, такая, что для любых вершин u и v количество ребер (u, v) в E_1 равно количеству ребер $(\delta(u), \delta(v))$ в E_2.

Пример.



G_1



G_2

§2. Способы задания графа. Диаметр, радиус, центры.

1. Список ребер

$$(u_1, v_1),\ (u_2, v_2),\ \ldots,\ (u_m, v_m)$$

Объем памяти для хранения графа = ?

2) Матрица инцидентности

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & e_1 & \dots & e_j & \dots & e_m \\
\hline
v_1 & & & & & \\
\dots & & & & & \\
v_i & & & \begin{cases} 1, & \textit{если } v_i \textit{ инцидентна } e_j \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases} & & \\
\dots & & & & & \\
v_n & & & & &
\end{array}
$$

Объем памяти для хранения графа = ?

3) Матрица смежности

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & v_1 & \dots & v_j & \dots & v_n \\
\hline
v_1 & & & & & \\
\dots & & & & & \\
v_i & & & \text{кол-во ребер } (v_i, v_j) & & \\
\dots & & & & & \\
v_n & & & & &
\end{array}
$$

Объем памяти для хранения графа = ?

4) Список смежности (для обыкновенных графов)

$$
\begin{array}{c|l}
v_1 & \\
\dots & \\
v_i & \text{вершины, смежные } v_i \\
\dots & \\
v_n &
\end{array}
$$

Объем памяти для хранения графа = ?

Опр. Расстоянием между двумя вершинами *u* и *v* в графе называется количество ребер в кратчайшей (*u*, *v*)-цепи.

Обозначение d(*u*, *v*)

Опр. Диаметром графа G называется $\mathrm{d}(u,v)=\max\limits_{u,v\in V}\mathrm{d}(u,v)$.

Опр. Характеристикой (эксцентриситетом) вершины t называется $\mathrm{r}(t) = \max\limits_{v \in V} \mathrm{d}(t, v)$.

Опр. Радиусом графа G называется $\mathrm{r}(G) = \min\limits_{t \in V} \mathrm{r}(t)$.

Центром называется каждая вершина t: $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}(t)$.